修士論文

原始磁場が生成する
宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎ

名古屋大学 理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻

宇宙論研究室 (C 研)
261601415 箕田鉄兵

2018 年 8 月 6 日

概要

多くの銀河や銀河団で磁場の存在が報告されているが，これらの磁場の起源は未解明である．現在考えられている有力なシナリオの一つは，初期宇宙において生成された微弱な磁場 (以下，原始磁場と呼ぶ) が現在観測される天体の磁場の種になったという仮説である．しかしながら，原始磁場の存在を示す観測データはほとんど得られていない．原始磁場が存在していたとすれば，磁場がビッグバン中の陽子や電子の運動に影響を与える．この運動により，光子の分布に揺らぎを生じ，宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の温度揺らぎや偏光成分として観測されることになる．実際にはこれらは観測されていないことから，原始磁場の強度に対して制限を与えることができる．最新の CMB の観測により，原始磁場の強度には数 nG の上限が得られている．一方で，原始磁場が存在すれば宇宙の大規模構造の進化にも影響を与える．特に，原始磁場によるローレンツ力がガスの密度進化に与える影響と，磁場のエネルギー散逸がガスの温度進化に与える影響の重要性が示唆されている．そこで本研究では，これらの影響を見積もった上で天文学的な観測データとの比較を行い，原始磁場の強度やその生成機構に対して新たな観測的制限を得ることを目的とする．

ここではまず，ガスの密度と温度の時間進化を，原始磁場によるローレンツ力やエネルギー散逸の影響を考慮して計算する．得られたガスの物理量の値から，スニヤエフ・ゼルドビッチ効果 (SZ 効果) によってつくられる CMB 温度揺らぎを見積もる．ここで SZ 効果とは，CMB 光子が高温のガスに散乱されることで CMB 光子の温度が周波数に依存して見かけ変化する現象のことである．SZ 効果はガスの密度分布や温度分布に強く依存する物理過程であり，原始磁場についての情報と深く結びついていることが期待される．

計算の結果，原始磁場は晴れ上がり直後の初期宇宙で銀河サイズの非線形な構造形成を促進することがわかった．また，原始磁場によってガスの密度と温度に強い反相関が生じることを示した．すなわち，水素ガスの密度が高い領域ではガスの温度は低く，逆にガスの密度が低い領域ではガスの温度は高いことが明らかになった．また，原始磁場に起因する SZ 効果の見積もりによって，原始磁場は見込み角度が約 1 秒角の非常に小さいスケールで大きな CMB 温度揺らぎを作ること，この CMB 温度揺らぎは銀河間空間のガス密度が低い領域において引き起こされていることを確認することができた．

目次

第 1 章

イントロダクション

1.1　宇宙における大スケールな磁場の存在

宇宙に存在する多様なスケールの構造において磁場の存在が確認されている．具体的には図 1.1 に示すように，惑星，恒星，コンパクト天体，分子雲，星間物質，銀河，銀河団，超銀河団など，非常に幅広いスケールと強度で磁場の存在が報告されている [3]．また，これらの天体の磁場の強度を測定する方法も様々である．例えば磁力線の周りを自由電子などが螺旋運動を行うことによって生じるシンクロトロン放射，電磁波の偏光面が磁場中を通過することで回転する現象であるファラデー回転，磁力線に揃った方向を向いているダストに電磁波が散乱されることによって生じる偏光効果，荷電粒子のスピンと磁場との相互作用によって粒子のエネルギー準位が分裂するゼーマン効果の測定などがあげられる．これらの手法を用いることで多くの天体に磁場が付随していることはわかっているのだが，磁場の起源や時間進化の詳細は不明である．とりわけ銀河や銀河団，超銀河団といった大スケールの構造に付随する磁場の存在は，その起源が初期宇宙論や素粒子の標準模型を超えた物理と結びついている可能性が高く，非常に興味深い．そこで，本論文では銀河サイズ (~ 10 kpc) よりも大きいスケールの磁場に焦点を当てる．

多くの銀河には磁場が付随することが報告されている [13]．我々の住む天の川銀河も例外ではなく，可視光・電波の直線偏光やシンクロトロン放射の観測などによって，銀河系内部に磁場が存在することが報告された [48, 49]．その後のより詳細な観測によって，現在では渦状腕に沿って配位する磁場とランダムにディスクを貫く磁場が存在することが判明した [148, 22, 68]．また，多数の系外銀河にも磁場が付随していることが報告されている [12, 64]．さらに，これら銀河が数百から数千個集まって重力的に束縛されている銀河団にも磁場の存在が報告されている [25]．典型的な銀河磁場の強度は数 μG であり [9, 10, 11, 65]，銀河団磁場の強度はおよそ 1 μG とされている [29, 60, 108, 17]．さらに大きなスケールについて，天の川銀河を含むおとめ座超銀河団やその近傍のペルセウス座・うお座超銀河団，ヘルクレス超銀河団にもおおよそ 0.5 μG 程度の磁場の存在が報告されている [88, 143, 74, 150]．

一方，天体がほとんど存在せず，希薄なガスが大スケールに広がっている銀河間空間でも，高エネルギーガンマ線の観測によって 10^{-15}–10^{-18} G 程度の磁場の存在が示唆されている

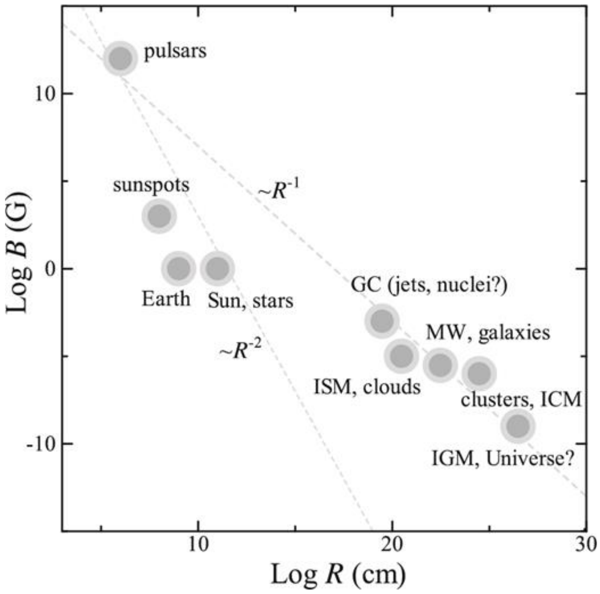

図 1.1　宇宙における様々な天体と付随する磁場の強度．GC は球状星団 (Globular Cluster), ISM は星間物質 (Interstellar Medium), MW は銀河系 (Milky Way), ICM は銀河団内物質 (Intracluster Medium), IGM は銀河間物質 (Intergalactic Medium) を意味している．横軸は天体の大きさ R であり，縦軸は磁場の強度 B を表す．二種類の破線は指数が-1 と-2 のべき乗則を示している (図は文献 [3] による).

[7, 98, 40, 136, 137, 27, 139]．これらの研究では，ブレーザーなどの天体から放射される GeV スケールのガンマ線がわずかな時間差をおいて繰り返し観測されていることから，銀河間磁場の強度を見積もっている．TeV スケールのガンマ線は低エネルギーの光子と散乱して相対論的な電子・陽電子の対生成を行うが，それに対して MeV および GeV スケールのガンマ線はほとんど散乱されずに地球に到達すると考えられる．ここで，TeV スケールのガンマ線から生じた高エネルギーの荷電粒子は逆コンプトン散乱を通じて周りの光子にエネルギーを注入し，GeV エネルギーのガンマ線となって地球に到達する．ここでもし銀河間空間に磁場が存在すると，TeV エネルギーのガンマ線から生じた電子・陽電子の軌道に変化が生じ，磁場が存在しない時に比べて到達時刻が遅くなると予想できる．このようにして，銀河間磁場が存在する場合は，高エネルギー天体から放射されて直接地球に到達する GeV スケールのガンマ線と，高エネルギーの荷電粒子からエネルギーを受け取って地球に到達する「もう一つの」GeV スケールのガンマ線が現れるはずである．このように，銀河間磁場の存在によって 2 種類の GeV ガンマ線が時間間隔をおいて観測されるという仮説は，1995 年にプラガによって提唱された [109]．このガンマ線の遅延放射は，対生成や対消滅を伴うことからペアエコーと呼ばれている．実際に，$Fermi$ 衛星の観測データについてペアエコーのフラックスを調べた結果，[137] によると，1 kpc のスケールでの平均強度が $B_{1\ \mathrm{kpc}} > 10^{-20.5}$ G 程度の銀河間磁場が存在するという結果が得られている．これ以外にも，ブレーザーからのガンマ線のエネルギースペクトルにおける減衰から銀河間磁場を制限する方法を用いて，2010 年に文献 [98] によって $B > 3 \times 10^{-16}$ G, [140] によって $B > 5 \times 10^{-15}$ G の制限がつ

けられている．また，点源からのガンマ線が対生成・対消滅をおこなうことで放射が広がって見える効果 [2] を用いて，こちらも同じ 2010 年に [7] によって $B \approx 10^{-15}$ G, その 5 年後に [27] によって 10^{-17} G $\lesssim B \lesssim 10^{-15}$ G と見積もられている．また遠方にあるブレーザーからの宇宙線とガンマ線のエネルギースペクトルを解析することで，2011 年に [40] が 10^{-17} G $\lesssim B \lesssim 3 \times 10^{-14}$ G という制限を行っている．これらのガンマ線による見積りは，ほぼ同時期に異なるデータと方法を用いて独立に行われた研究であるにもかかわらず，銀河間磁場の強度として見積もられた値がどれも 10^{-15}–10^{-20} G 程度で良い一致を見せている点で興味深く，結果についての説得力を高めていると言えるだろう．

1.2 スケールの大きな磁場の生成シナリオ

上記の銀河・銀河団・超銀河団磁場，および銀河間磁場がどのようにして生成されたかという問題は明らかでない．宇宙史における磁場の生成と進化の過程について，大きく分けると次の二つのシナリオがある：

(1) 宇宙の晴れ上がり以前の初期宇宙において何らかの機構で磁場が生成され，現在観測されている天体の磁場の種になった (この初期宇宙で生成される磁場のことを原始磁場と呼ぶ).

(2) 晴れ上がり以降の初代天体形成時あるいはその前後に磁場が生成され，その後の天体の活動や爆発などによって銀河間空間に輸送された．

(1) のシナリオを支持する磁場生成機構の例として，インフレーション中における磁場生成 [141, 115, 35, 94, 43]，宇宙論的な一次相転移による磁場生成 [70, 142, 61]，およびその他の磁場生成 [47, 55, 73, 8] があり，(2) の例としては，原始銀河中の星形成に伴う磁場生成 [81, 117]，その後の乱流による磁場の増幅 [114], アウトフローやジェットなどによる磁場の輸送 [31, 145, 45, 46, 91] などがある．では，これらの生成機構で作られる磁場はどういう違いがあるのだろうか．あるいはこれら両者はどちらの方が観測データに好まれるのだろうか．このような疑問に答えるために，それぞれの生成シナリオの特徴をまとめながら観測データとの関連を考察しよう．

まず，(1) のシナリオで生成される原始磁場について説明する (原始磁場についての最近のレビュー論文の例として [128, 79, 129] を挙げておく)．理論的に生成されると考えられる磁場の強度は最大でも 10^{-20}–10^{-30} G 程度であり，これより 10 桁以上も大きい強度を持つ銀河や銀河団の磁場を説明できるかという問題がある [37]．この問題については，恒星などの回転する電磁流体において磁場が増幅および維持される機構である，ダイナモ理論 [102, 21] の存在がとりわけ重要であると考えられている．しかしながら，それぞれの天体に固有の物理的性質との関係など，ダイナモ理論による物理現象は完全には解明されていないので，磁場の増幅率の見積りには大きな不定性がある [116, 32, 80]．それに加えて，必要とされる種磁場の強度が理論的に生成可能である原始磁場の最大の強度と同程度である．ゆえに，ダイナモ理論の発見から半世紀以上経った現在でさえ，現在の銀河磁場の初期条件として原始磁場が妥当と言えるかどうかが明らかではない．一方，銀河間磁場の観測からは，理論的に予言されている原始磁場と報告されている銀河間磁場が同程度の強度を持つため，原始磁場が宇宙の膨張によって銀河間空間に取り残されて，現在の銀河間磁場に

なったのではないかという示唆があたえられる．

次に，(2) のシナリオで形成される磁場について説明する．このシナリオで最も有力な磁場生成の方法の一つは，ビアマンバッテリー機構 [16] と呼ばれる方法である．ビアマンバッテリー機構は，電磁流体中で乱流が起きた際に，その回転成分が電子とイオンとの間に相対速度を作ることで磁場を生成する機構である．ビアマンバッテリー機構はダイナモ機構とは異なり，ゼロから磁場を生成することができるために，様々な状況，特に初代天体の周囲で磁場を生成する方法として考えられてきた．例えば，[81] では原始銀河の周囲で 10^{-21} G 程度，[58] では初代銀河の周囲で 10^{-18} G 程度，[66] では初代星の超新星残骸の周りで 10^{-14}–10^{-17} G 程度，[149] では初代星の中心部で 10^{-9} G 程度，[6] では初代星の周囲で 10^{-19} G 程度，[38] では再電離源となる天体周りで $B_{100\ \mathrm{kpc}} \sim 10^{-23}$ G 程度の磁場が生成されると結論づけられている．本研究では (1) のシナリオで生成された磁場を検証したい．

1.3 原始磁場の観測的制限の重要性

宇宙における磁場の起源を解明することは，この分野における最大の目標の一つである．これまで見てきたように，宇宙における磁場の起源には多数の候補があってそれぞれの機構によりつくられる磁場のスケールや強度が異なる．そこで，理論的には非常に多くの磁場生成機構が考えられているので，これらの磁場生成のモデルを制限し，生成機構を特定するためには，観測的な制限を強めることが必要不可欠である．特に，(1) と (2) のシナリオを検証・区別するためには，天体形成以前の初期宇宙での磁場の強度を測定することが重要である．しかし，この章のはじめで述べたような磁場の測定方法では近傍宇宙から到来する信号が強すぎるため，これらの方法を原始磁場の存在を示すために用いることは非常に困難である．

現在得られている，原始磁場への観測的制限の一つに宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background, CMB) の温度の非等方性によるものがある．原始磁場が存在すると磁場のエネルギーにより空間に歪みを生じ，バリオンと光子が強く結合している流体の非一様性に影響を与える．そのため原始磁場が非常に強く揺らいでいれば初期宇宙における光子の分布にもゆらぎが生じ，CMB の温度揺らぎや偏光成分として観測されるはずである．このようにして，現在観測されている CMB の温度揺らぎから原始磁場の強度について観測的制限が得られているが，その上限値はおよそ 10^{-9} G 程度と非常に大きい値である．一方で，先に述べた通り原始磁場の生成理論で予言される原始磁場の強度はいずれも最大で 10^{-20}–10^{-30} G 程度であり，初期宇宙の磁場生成の理論に対する制限はほとんど得られていない．

上記のような観測量からの制限に加えて，近年の宇宙論的シミュレーションの高精度化に伴い，原始磁場が構造形成に与える影響についての関心が高まっている．例えば，先行研究 [93] では，宇宙論的な理想 MHD シミュレーションを行うことによって，原始磁場が統計的な銀河の性質に与える影響を調べている．具体的には，数値計算の初期時刻 (赤方偏移 $z = 127$ の時代) に強度 10^{-8}–10^{-12} G の空間的に一様な原始磁場を与え，宇宙の星形成率密度，銀河の数の時間進化，および現在時刻における星質量関数，星ハロー質量割合を調べている．この結果，図 1.2 および図

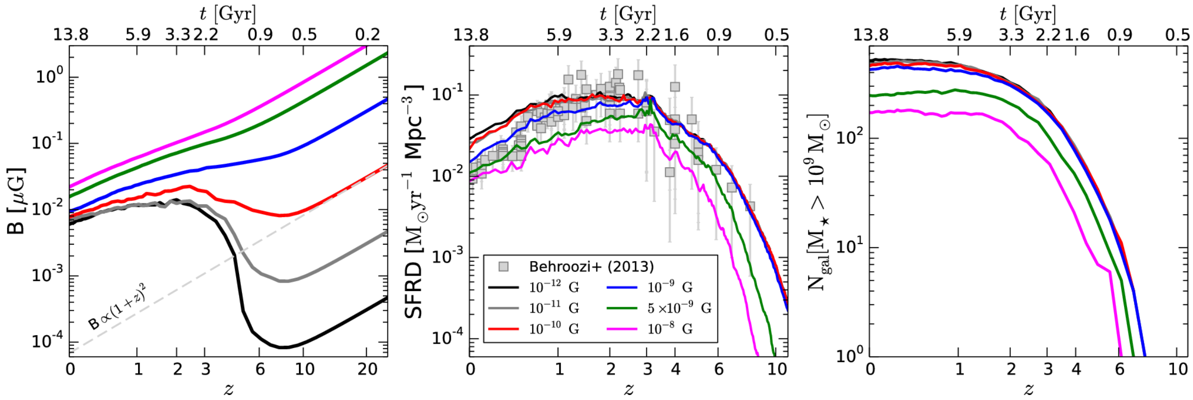

図 1.2　(左) 体積平均した磁場強度の時間進化．初期時刻において 10^{-9} G よりも大きい強度を与えると，磁束密度の保存則 $B \propto (1+z)^2$ に従って現在まで進化するが，初期磁場の強度がそれよりも小さい場合は銀河内部の乱流によって大きく増幅されている．(中央) 宇宙における星形成率密度の時間進化．比較のために 2013 年の SDSS の観測結果 [15] をグレーの点で示している．初期磁場の強度が $B \gtrsim 10^{-9}$ G である場合は磁気圧によってガスの収縮を妨げるので，宇宙論的な星形成率密度の値は低い．(右) 10^9 太陽質量より大きい星質量を持つ銀河の総数の時間進化．初期時刻における磁場の強度が 10^{-9} G より大きいと，星形成率の場合と同様に磁気圧によって銀河の数が著しく減少することが見て取れる．図は文献 [93] によるものである．

1.3 を見てわかるように，原始磁場の強度が 10^{-9} G を超えると磁気圧によって星形成が抑制され，シミュレーション結果と観測から見積もられている物理量との間に大きな違いが生じると結論づけている．しかしこの計算では原始磁場の非一様性や原始磁場の散逸を考慮していない．実際に，これらの効果が重要であることが先行研究によって指摘されている．例えば原始磁場の非一様性がガスの密度の時間進化に影響を及ぼすこと [146, 124] や，磁場の散逸が温度や電離度の進化に強い影響を与えること [121] が報告されていて，原始磁場が存在する場合の構造形成を議論する際には考慮してしかるべきである．また，先行研究 [93] の宇宙論的 MHD シミュレーションでは，超新星爆発や活動銀河核による星形成へのフィードバックをモデルとして考慮しているが，このモデルには不定性があり，モデルの変化は結果に大きな影響を与える可能性があると報告されている．したがって，原始磁場が宇宙論的な観測量に与える影響を調べる際に，その観測量が星形成によって大きな影響を受ける場合は，注意が必要である．

そこで本研究では，原始磁場が構造形成に与える影響を定量的に，かつ空間的な非一様性も考慮に入れて調べる．具体的には，原始磁場が生成するローレンツ力によるガスの密度進化への影響，原始磁場のエネルギーの散逸によるガスの温度進化への影響を調べる．原始磁場によるこれらの効果は先行研究 [121] によって定式化され，定量的な見積もりがされているが，原始磁場の空間的なゆらぎやガスの密度と温度の相補的な関係については議論されていない．よって，本研究では先行研究 [121] で与えられている式に加えて，原子物理学に基づく種々の冷却効果や，原始磁場が作る密度ゆらぎによって生成される温度ゆらぎの二次補正を定式化して考慮した．また，ガスの物理量を計算するだけでなく，密度と温度の空間的な相関関係を考察した．さらに，銀河間空間における

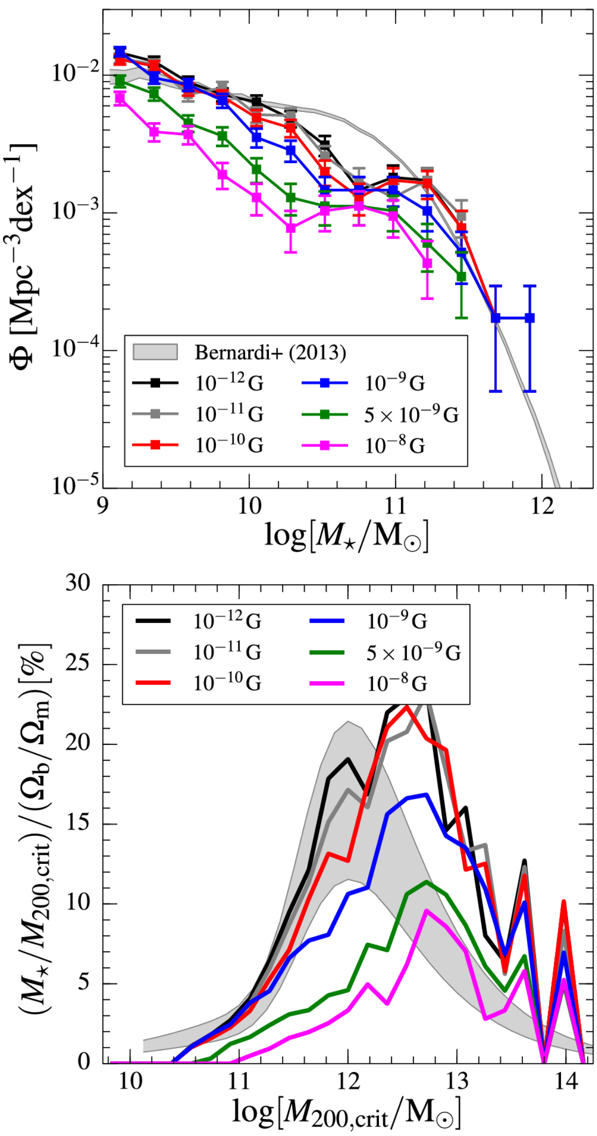

図 1.3　(上) 宇宙論的 MHD シミュレーションによって得られた銀河の星質量関数と 2013 年の SDSS の観測結果 [15] との比較．(下) 銀河の質量に占める星質量の割合．灰色の領域は観測によって得られた重元素の存在量から推定した星質量の割合である [14]．原始磁場の強度が強いほど銀河内部の星形成活動が低下することを表している [93]．

バリオンガスが CMB の温度揺らぎに与える影響として，熱的スニヤエフ・ゼルドヴィッチ効果という現象に原始磁場が与える影響も見積もり，観測的に原始磁場の強度を制限しようと試みた．ここでは原始磁場は確率的に揺らいでいるランダムガウス場であるとみなし，パワースペクトルを波数に対して単一のべきで表せるものと仮定する．このとき，原始磁場のモデルはあるスケールでの強度とスペクトル指数の二つのパラメータだけで特徴づけられる．そこで本研究はこれら二つのパラメータを変化させた時の構造形成が受ける影響を調べ，原始磁場の情報と宇宙マイクロ波背景放射の観測データとの関連性を見出すことを目的とする．

1.4 本論文の構成

本論文では著者が行った研究 [96] について，分野のレビューも交えて日本語で説明する．この研究では原始磁場が構造形成に与える影響を計算し，その結果を用いて宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎの模擬観測を行った．そこでまず第 2 章では，宇宙論の標準モデルを一般相対性理論の発見から現在にいたるまで順を追って説明する．第 3 章では磁場の存在を考慮しない場合の構造形成の理論を記述する．これは構造形成の線形理論と呼ばれる基本的なモデルである．第 4 章では先行研究によって得られている原始磁場についての理解を詳細に立ち入って説明する．特に，実際の観測との関連性や原始磁場の構造形成への影響に焦点を当てる．第 5 章で著者がおこなった研究の目的と計算手法を説明し，第 6 章では得られた結果の報告を考察を含めて行い，第 7 章で本研究の総括を行う．また，宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎの取り扱いにおいて重要な特殊関数を巻末に付録として収録した．最後に，本研究で使用した宇宙論パラメータを記してこの章を閉じることにする．*Planck* 2015 の結果 [112] に基づき，ハッブル定数 $H_0 = 67.8$ km/s/Mpc, ダークエネルギーの密度パラメータ $\Omega_\Lambda = 0.692$, 非相対論的物質の密度パラメータ $\Omega_\mathrm{m} = 0.308$, バリオンの密度パラメータ $\Omega_\mathrm{b} = 0.048$ とした．また，本研究においては平坦な ΛCDM モデルと呼ばれる，標準的な宇宙モデルを仮定している (これは，宇宙の平均曲率が 0 であり，ダークエネルギーのモデルとして宇宙定数，ダークマターのモデルとして温度や圧力を持たない物質を仮定することと等しい．これらのことについて詳しくは次章で扱うことにする)．

第 2 章

標準宇宙論

この章では，2018 年現在における標準的な宇宙論について，歴史的な観点も含めて説明する．

2.1　ビッグバン宇宙モデル

2.1.1　一般相対論と膨張宇宙モデル

現在の標準的な宇宙論モデルを構築する上で最も根本的な事実の一つは，「現在の宇宙は膨張している」という考えである．今から約 100 年前の 1917 年，アインシュタインは一般相対性理論の帰結として以下のアインシュタイン方程式を表した [39]．[*1]

$$R_{ij} + \left(\Lambda - \frac{1}{2}R\right) g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \tag{2.1}$$

ここで右辺の π, G, c はそれぞれ円周率，重力定数，真空中の光速であり，通常定数とみなす．また T_{ij} はエネルギー運動量テンソル，g_{ij} はリーマンの計量テンソルと呼ばれていて，後者はわずかに離れている時空の 2 点間距離 ds と時空間の座標 x^i との間に

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{2.2}$$

の関係が成り立つように定義されている．R_{ij}, R はそれぞれリッチテンソルとリッチスカラーであり，計量テンソル g_{ij} によって定義されている．Λ は宇宙項と呼ばれる定数である．宇宙項は正であれば宇宙の膨張に，負であれば収縮に働く．アインシュタイン方程式 (2.1) は，左辺の時空間の幾何と右辺の物質 (エネルギー) の分布が等価であることを示している．宇宙に存在する物質に対して，重力は常に引力として働く．しかしアインシュタインは，宇宙は膨張も収縮もしないものだと考えたので，空間を膨張させる存在として式 (2.1) に宇宙項 Λ を導入した．

[*1] 式 (2.1) はアインシュタインの原論文 [39] に於ける式 (13.a) に対応しているが，ここでの表記は彼が用いたものと一致しない．また，実際にはアインシュタインは 1915 年から一般相対性理論に関するいくつかの研究を発表している．ただし宇宙項を初めて用いたのはこの文献 [39] が初めてである．

このあと，フリードマンは 1922 年に宇宙が一様等方であること：

$$ds^2 = -c^2dt^2 \ + \ a^2(t) \ \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} \ + \ r^2 \ (d\theta^2 + \sin^2\theta \ d\phi^2)\right] \tag{2.3}$$

と，物質 (エネルギー) を完全流体とみなせること：

$$T_{ij} = (\rho c^2 + P)u_i u_j + P g_{ij} \tag{2.4}$$

を仮定して，アインシュタイン方程式 (2.1) から宇宙の大きさの時間発展を表す以下のフリードマン方程式を導出した [42].

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{2.5}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}P \tag{2.6}$$

ここで，式 (2.3) は極座標表示で表されており，一様等方宇宙での計量は $a(t)$ および k の二つのパラメータで決定される．$a(t)$ はスケール因子と呼ばれる宇宙の大きさを表すパラメータで，一様等方宇宙においては時間にのみ依存する関数である．また，k は空間の曲率を表す定数で，$k > 0$, $k = 0$, $k < 0$ となる宇宙をそれぞれ閉じた宇宙，平坦な宇宙，開いた宇宙と呼ぶ．*2 式 (2.3) のような計量はフリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー計量と呼ばれている．次に，式 (2.4) において，ρ は物質密度，P は圧力，u_i は流体の四元速度であり，完全流体については先のエネルギー運動量テンソルと以下のように関係づけられる．

$$T^0_{\ 0} = -\rho c^2, \qquad T^i_{\ j} = \delta^i_{\ j} P \tag{2.7}$$

ただし $\delta^i_{\ j}$ はディラックのデルタ関数であり，

$$\delta^i_{\ j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{2.8}$$

である．フリードマンはこの方程式を解き，宇宙が膨張するという解が存在することを指摘した．その後 1927 年にルメートルが同様の解を導出し，宇宙が原子のような小さな状態から爆発的に膨張して進化したとするアイデアを提唱した [85]．こうしてビッグバン理論が提唱され，一部の研究者に支持され始めた．ただしこの時点ではビッグバンを支持する観測的な証拠は存在していないため，フレッド・ホイルらを始め多くの研究者が定常宇宙論を支持していた．

*2 曲率や宇宙項などは本研究との関連性が低い (どちらも存在しないものとして研究を行った) ため，詳細な説明は日本語で書かれた分かりやすい入門書 [156, 155] に譲ることとする．

2.1.2 ハッブルの法則

1929 年にハッブルは観測されていた銀河 (当時は星雲と思われていた) の距離と速度について，比例関係が成り立つことを発表した [71]．ここで銀河の距離は見かけの明るさから算出したもので，速度は観測される銀河の電磁波に対してドップラー効果を用いて推定したものである*3．ここでドップラー効果に関して宇宙論において基本的な物理量である，赤方偏移 z を定義する．銀河から放出された電磁波の静止系における波長を λ_e, 観測された波長を λ_o として，以下のように定義する．

$$z = \frac{\lambda_\mathrm{o} - \lambda_\mathrm{e}}{\lambda_\mathrm{e}} \tag{2.9}$$

一方，光速を c, 光源の後退速度を v とすると，ドップラーの法則を用いて

$$\lambda_\mathrm{o} = \frac{c+v}{c}\lambda_\mathrm{e} \tag{2.10}$$

となるから，銀河の後退速度は観測される赤方偏移 z をもちいて

$$v = cz \tag{2.11}$$

となる*4．

一方，後退速度とは独立に，天体の距離もまた観測によって求める必要がある．この手法については，例えば年周視差，主系列星，ケフェウス型変光星，渦巻銀河におけるタリー・フィッシャー関係，楕円銀河における Fundamental Plane, Ia 型超新星を用いる方法などが用いられてきた．かくして，遠くの銀河ほど速く遠ざかっていることが観測的に証明された．この銀河の後退速度の原因として，宇宙空間そのものの膨張が考えられるようになり，ルメートルによって提唱された宇宙のビッグバン理論が現実的に考えられ始めた．

2.1.3 ビッグバン元素合成と宇宙の晴れ上がり

現在，宇宙がビッグバンと呼ばれる高密度高温度の状態から始まったことは広く受け入れられている．この項では，ビッグバンの証拠だと考えられている，ビッグバン元素合成と宇宙マイクロ波背景放射の予言について説明する (後者については，本研究と深い関わりがあるため次節で詳細に

*3 実は，観測された系外銀河がドップラーシフトしたスペクトル線をもつことは，1912 年にシュライファーによって指摘されていた [127]．このドップラー効果から算出した銀河の速度とその銀河までの距離との間の関係はハッブルによって初めて指摘されたのである．

*4 ただし，これはあくまでも銀河の運動が非相対論的であるという近似の下で成り立つ式である．相対論的ドップラー効果を考慮すると赤方偏移と銀河の後退速度の関係は

$$1 + z = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \tag{2.12}$$

である．これを $v/c \ll 1$ として Talor 展開すると式 (2.11) に一致する．

扱う)．1948 年アルファー，ベーテ，ガモフによって，ビッグバン宇宙モデルにおいては宇宙が膨張するにつれて温度が低下していき，水素やヘリウムなどの軽元素が合成されたとする論文が発表された [4]．この軽元素の割合は概ね現在の宇宙における割合と一致しており，ビッグバン宇宙モデルの正当性を支持する研究成果となった．このモデルは著者の名前にちなんでアルファ・ベータ・ガンマ理論と呼ばれる．その後，この元素合成モデルが日本の林忠四郎によって見積もり直された結果，より正確に観測事実を説明できるようになったので，アルファ・ベータ・ガンマ・ハヤシ理論とも呼ばれることがある [69]．

1951 年にアルファーとハーマンによって，宇宙が膨張するにつれて温度が低下すると，ある時点でビッグバン元素合成によって生成された原子核が自由電子を捕獲して，ほとんどの水素とヘリウムは中性化すると指摘された [5]．また，それまで自由電子とトムソン散乱を通じて強く結合した光子がバリオンと相互作用しなくなるため，ほとんど散乱されずに長距離を進むことができるようになると考えられる．このことから，宇宙が中性化する時代のことを「宇宙の晴れ上がり」と呼ぶ．当時アルファーらは現在においておよそ 28 K の一様等方な放射が存在すると考えたが，その後の精密な熱史の計算によって，現在では宇宙の晴れ上がりはビッグバンから約 38 万年後で起こり，この一様な放射の温度は晴れ上がり時刻においておよそ 3000 K であると考えられている．後述する宇宙マイクロ波背景放射の発見によって，この理論の正しさが実証され，ビッグバン元素合成の理論と合わせてビッグバン宇宙論の確たる証拠と考えられるようになった．

2.2 宇宙マイクロ波背景放射

この節では，ビッグバンの直接的な証拠とされる宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background, CMB) について説明する．CMB は，ペンジアスとウィルソンが 1965 年に初めて検出したほとんど完全な黒体放射である [107]．その後，NASA や ESA の観測衛星である COBE, WMAP, Planck によって観測された結果，CMB の黒体温度は全天においてほとんど一様であり，その平均温度は

$$T_0 \simeq 2.7255\mathrm{K} \tag{2.13}$$

であることがわかった．現在においては，図 2.1 のように CMB の温度にはわずかな非等方性が存在することが判明していて，この非等方性が現在観測されている構造形成の種になったと考えられている．この節では，CMB 温度の非等方性の観測的な扱い方と，その主な成分の一つであるスニヤエフ・ゼルドビッチ効果に焦点を当てて議論を行う．

2.2.1 CMB 温度揺らぎ

現在観測されている CMB の温度の非等方性は，CMB が放射される前に作られるものと放射された後に作られるものの 2 種類に分けることができる．前者は初期宇宙における場の量子揺らぎがインフレーションを経て，古典的な物質の密度揺らぎになることに起因すると考えられている．また後者は銀河系の運動による双極子成分，積分ザックス・ヴォルフェ効果，そして次節で扱うスニ

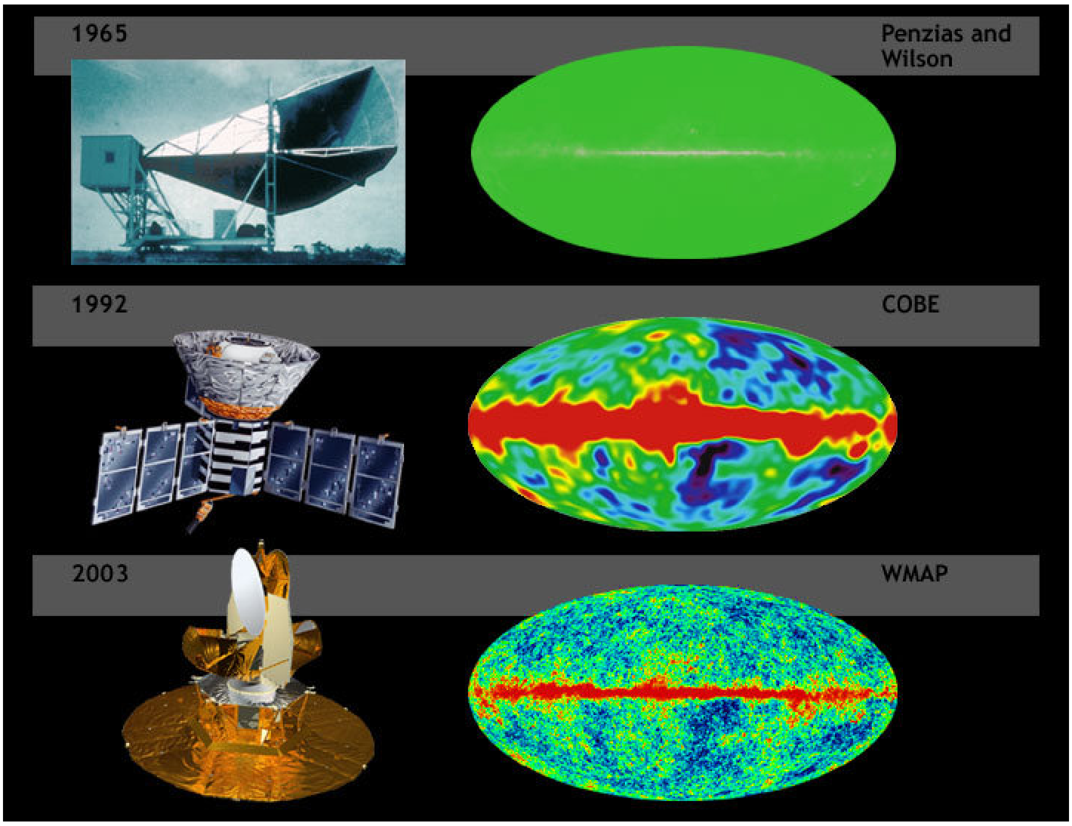

図 2.1　(上) ペンジアスとウィルソンによって測定された CMB の全天マップ．中心の銀河系からの放射がわずかに見える．(中央)COBE 衛星によってとらえられた CMB 全天マップ．銀河系の運動による双極子成分が初めて観測された．(下)WMAP 衛星で撮影された CMB 全天マップ．局所的な温度の揺らぎが観測され，初期宇宙における物質分布の情報が高精度で得られたため，宇宙論の精密化に大きく貢献した．(画像は NASA/WMAP Science Team による．)

ヤエフ・ゼルドヴィッチ効果などに分けられる．揺らぎが作られた後は宇宙膨張によって引き伸ばされるので，これらは CMB の非等方性を角度スケールで分解することにより区別できる．

この節では文献 [59] の 9.1 節 “CMB Temperature Anisotropy” を参照にして，CMB の温度揺らぎの標準的な取り扱い方について説明する．天球面状のある視点への方向 $\mathbf{n}$ から到来する CMB 光子の温度を $T(\mathbf{n})$ としよう．CMB 温度 $T(\mathbf{n})$ は，一般には平均値 (2.13) と異なる値を持っている．この平均値からの差分を

$$\delta T(\mathbf{n}) \equiv T(\mathbf{n}) - T_0 \tag{2.14}$$

と定義しておく．ここで，実際の温度に対する温度揺らぎの割合は球面調和函数 $Y_{lm}(\mathbf{n})$ で展開すると便利である．(球面調和函数とは単位球面状の完全正規直交基底をなす函数の集合である．詳細は文献 [83] 及び付録 A.2 を参照せよ．)

$$\frac{\delta T(\mathbf{n})}{T_0} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}) \tag{2.15}$$

ここで温度の正値性および球面調和函数の性質 $Y^*_{l,m} = (-1)^{-m} Y_{l,-m}$ により，係数 a_{lm} は以下の関係

$$a^*_{l,m} = (-1)^m a_{l,-m} \tag{2.16}$$

を満たす．球面調和関数は正規直交化されていることより，a_{lm} は以下のように積分表示を用いて表すことができる．

$$a_{lm} = \int d\mathbf{n} \frac{\delta T(\mathbf{n})}{T_0} Y^*_{lm}(\mathbf{n}) \tag{2.17}$$

ここで積分は単位球面について行うものとする．この式を用いることで，測定された関数 $\delta T_0(\mathbf{n})$ から係数 a_{lm} を展開して得ることができる．ここで a_{lm} が持つ物理的な意味を考察してみよう．$l \gg 1$ において有効な，球面調和関数の漸近的な表式 (A.38) から，多重極モーメント l は，角度スケールとしておよそ $\theta \sim \dfrac{\pi}{l}$ に対応し，係数 a_{lm} の大きさがその角度スケールでならした温度揺らぎの大きさに相当することがわかる．また，CMB 温度揺らぎに対する最も大きい寄与は $l = 1$ の双極子成分である．これは地球が CMB の静止系に対して固有の運動をしていることに由来するものだと考えられており，通常，このドップラー効果による双極子揺らぎは宇宙論において重要な意味を持たない．

宇宙が等方的で温度揺らぎがランダム場であるとすると，l と m の組み合わせに対して，異なる係数 a_{lm} は相関をもたないはずである．このことは，想像上の存在であるが，我々が住む宇宙に似た宇宙が多数存在するような集団としての宇宙について適用される．このような宇宙の集団についてアンサンブル平均をとることで，以下の性質が得られる．

$$\langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{2.18}$$

ここで比例定数は全角運動量 l にのみ依存しており，その方向 m には依存しない．宇宙論的な観測量である，CMB の測定は初期の揺らぎがガウス関数に従うことを示している．このガウス性は線形成長する間は保持され，係数 a_{lm} は初期揺らぎについて線形の関数なので，結論として係数 a_{lm} もランダムガウス場であることがわかる．(ランダムガウス場について詳細は例えば文献 [59] の付録 C を参照されたい．) したがって，係数の C_l が完全に CMB の温度揺らぎを決定する．

実際には，我々が研究対象として扱える宇宙はひとつしかない．すなわち，得られる a_{lm} の組は一通りしか存在しないし，観測データから関係式 (2.18) を直接的に確かめることは不可能である．ただし，多重極モーメント l が大きい部分においては，異なる $m = -l, -l+1, ..., l-1, l,$ に対する多数の a_{lm} について観測されたデータセットの統計的な性質を用いて，仮説 (2.18) と矛盾がないか，あるいは温度揺らぎの非ガウス性はゼロと考えて矛盾がないか，などということは考えることができる．現在のデータにおいて，これらの矛盾は見つかっていない．

式 (2.18) の妥当性を仮定して m について平均をとることで，観測データから係数 C_l を以下のように近似的に評価することができる．

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} |a_{lm}|^2 \tag{2.19}$$

C_l に含まれる統計的な誤差は $\dfrac{1}{\sqrt{l+1/2}}$ 程度である．[*5] ガウス性の仮定のもとでは，測定量 (2.19) がこの宇宙における CMB 温度揺らぎについてのすべての情報を持っていることになる．また繰り返しになるが，実際に観測出来る CMB の温度の全天地図は 1 枚しか得られない．このため C_l には原理的に除去できない統計的誤差が存在して，この誤差のことをコスミックバリアンスと呼ぶ．よって理論的に予言されている C_l の値は測定される値に対して $\dfrac{1}{\sqrt{l+1/2}}$ の割合くらいであれば異なってもよいとされる．また，コスミックバリアンスは宇宙論パラメータや初期揺らぎのスペクトルの観測による決定精度にも影響を与える．

係数の C_l は温度揺らぎの二点相関関数 $\langle \delta T(\mathbf{n_1})\delta T(\mathbf{n_2})\rangle$ を決定する．揺らぎがガウス分布であれば，それ以外の相関関数は全て二点相関のみによって記述される．定義式 (2.15) を用いると二点相関関数は以下のように書き下せる．

$$\begin{aligned} \langle \delta T(\mathbf{n_1})\delta T(\mathbf{n_2})\rangle &= T_0^2 \sum_l C_l \sum_m Y_{lm}(\mathbf{n_1})Y_{lm}^*(\mathbf{n_2}) \\ &= T_0^2 \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l P_l(\mathbf{n_1 n_2}) \end{aligned} \tag{2.20}$$

ここで P_l はルジャンドル多項式である (付録 A.2 参照)．この式変形には式 (A.19) および (A.36) を用いた．(2.20) から温度の分散を求めると

$$\langle \delta T^2(\mathbf{n})\rangle = T_0^2 \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l \sim T_0^2 \int d(\log l) \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l \tag{2.21}$$

ここで最後の近似には十分 l が大きいことを用いた．ここで，

$$\mathcal{D}_l \equiv T_0^2 \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l \tag{2.22}$$

は多重極モーメントについて 10 進数で刻んだときの温度揺らぎの振幅の二乗の値を決めている．通常 CMB の温度揺らぎとして見られるグラフはこの量をあらわしたものである．

図 2.2 は *Planck* 衛星によって観測された CMB の温度揺らぎである．以下に，図 2.2 から読み取れることを簡潔にまとめる：

(1) CMB 温度揺らぎは $\dfrac{\delta T}{T_0} \sim 10^{-4}$–$10^{-5}$ 程度の大きさである
(2) 角度パワースペクトラムには $l \sim 200, 500, 800, 1100, 1400$ で極大をとるような振動が見られる
(3) $l \sim 500$ より大きい部分では，l が増加すると非等方性は減少する
(4) $l > 1000$ では l が増加するに連れて振動が急速に減衰していく

これらの特徴は，初期のスペクトルがほとんど平坦で，振幅の大きさが 10^{-5} 程度であるようにとることで，ΛCDM モデルの断熱揺らぎのスカラーモードによって全て説明できる．l につい

[*5] 定義 (2.19) と，a_{lm} の平均値は 0 になることから C_l は χ^2_{2l+1} 分布に従うことが示唆される．よってゆらぎは $(\delta C_l)^2 = \dfrac{2C_l^2}{2l+1}$ である．

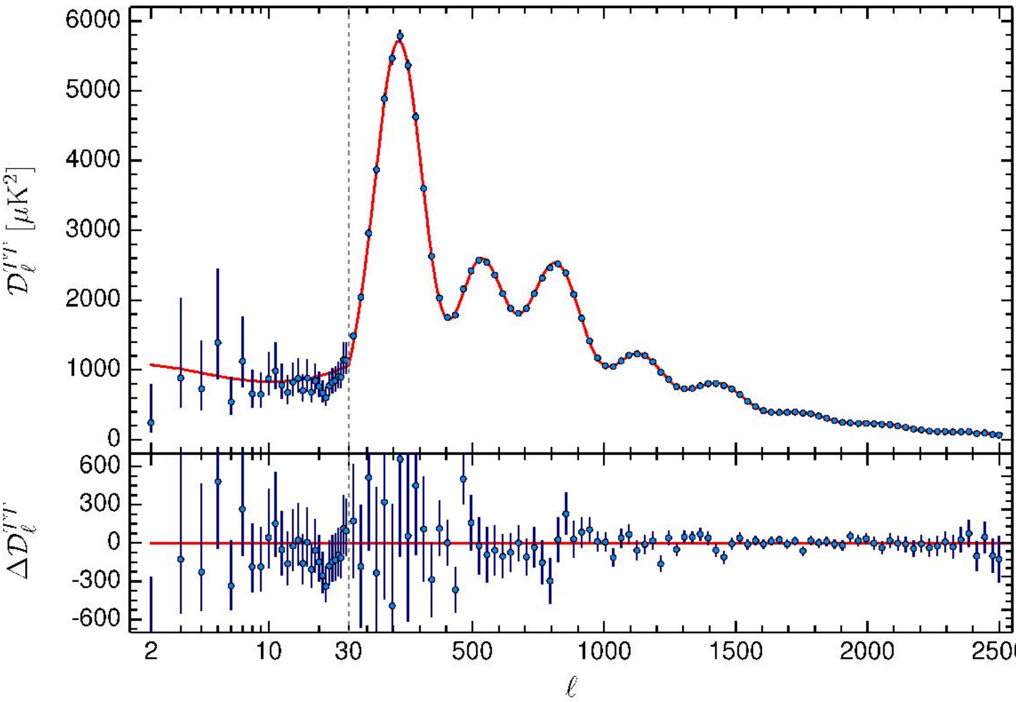

図 2.2　*Planck* 衛星で観測された CMB 温度揺らぎ．横軸は多重極モーメント l で，縦軸は式 (2.22) で定義される $\mathcal{D}_l$ を示す．ここで横軸について $2 \leq l \leq 30$ では対数プロット，$l \geq 30$ では線形プロットを用いている．誤差棒付きの青点は実際の観測データを，赤実線は回帰分析により得られた理論曲線を表す．ここで観測データの誤差棒の長さはデータの不定性 $\pm 1\sigma$ に対応している．また理論計算には ΛCDM 宇宙論モデルを仮定し，マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いて得られたベストフィットの宇宙論パラメータを採用している．また，下図は理論曲線からの観測データのズレを拡大して表した図である．グラフの振る舞いについて詳細は本文を参照されたい．(画像は NASA/*Planck* collaboration による [112]．)

て $\mathcal{D}_l$ が振動するのは，晴れ上がりの時期におけるバリオン光子プラズマの音波によるものである [135, 106]．[*6] さらに，角度スケール $l > 1000$ でこの振動が減衰しているが，これはシルク減衰と呼ばれる現象である [126]．大きい l(小さいスケール) では，バリオンは光子の圧力に妨げられて揺らぎの成長が抑制される．このためダークマターの重力ポテンシャルの成長が抑制されることで角度パワースペクトルの振幅は減衰する．

[*6] この音波によって作られる揺らぎはバリオン音響振動 (Baryon Acoustic Oscillation, BAO) と呼ばれ，宇宙論モデルの制限として現在でも重要な物理量である．余談ではあるが，この BAO の存在を初めて予言した文献 [135] では，同じく現在の宇宙論において重要な物理量である，スニヤエフ・ゼルドヴィッチ効果の定量的な予言もなされている (スニヤエフ・ゼルドヴィッチ効果について詳細は 2.3 節で述べる)．この論文の出版は 1970 年であり，CMB の発見からわずか 5 年後のことである．この時代の観測では CMB の温度に揺らぎが存在するかどうかさえ確認されていなかったことを鑑みると，この論文の存在は非常に驚くべきことである．

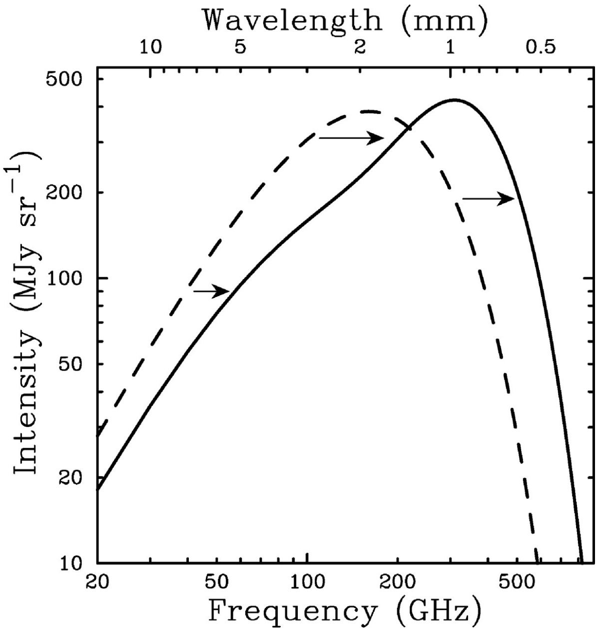

図 2.3　SZ 効果を受ける前 (点線) と後 (実線) の CMB のエネルギースペクトル．ここではスペクトルの歪みを誇張するため，典型的な銀河団よりも 1000 倍程度質量の大きい銀河団のガスから散乱を受けたと想定して描かれている．本文で述べている通り，実線と点線は周波数 218 GHz (波長 1.38 nm) で交差している (図は文献 [26] による).

2.3　スニヤエフ・ゼルドヴィッチ効果

この項では，CMB の温度揺らぎを生成する機構としてスニヤエフ・ゼルドヴィッチ効果の説明を行う．1969 年，スニヤエフとゼルドヴィッチは CMB 光子が高温の電離ガスから逆コンプトン散乱を受けることで，図 2.3 のようにエネルギースペクトルに歪みが生じる可能性を指摘した [134, 154]．現在，この効果は熱的スニヤエフ・ゼルドヴィッチ効果 (SZ 効果) と呼ばれていて，多数の電波望遠鏡で観測されている．熱的 SZ 効果は典型的には温度 $\sim 10^7$–10^8 K の銀河団中の電子ガスによって生じる効果である．その他にも，CMB 光子が電子から逆コンプトン散乱を受ける場合があることがわかっていて，それらはまとめて SZ 効果と呼ばれている．熱的 SZ 効果以外の SZ 効果の例としては，電子ガス雲の視線方向の速度成分によって生じる運動学的 SZ 効果，視線方向と垂直な方向の速度成分によって生じる CMB の偏光 SZ 効果がある．

SZ 効果の大きさを表す上で，時刻 t, 振動数 ν の光子の分布関数 $f(\nu, t)$ の変化はしばしば以下のカンパニエーツ方程式で表される [135].

$$\frac{\partial f(\nu,t)}{\partial y} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^4 \frac{\partial f(\nu,t)}{\partial x}\right) \tag{2.23}$$

ただしここで，

$$x(\nu) \equiv \frac{h_{\rm Pl}\nu}{k_{\rm B}T_\gamma} \tag{2.24}$$

$$y(\hat{n},t) \equiv \frac{k_{\rm B}\sigma_{\rm T}}{m_{\rm e}c^2}\int_0^t d\chi\ a_\chi w(\chi,\hat{n}) \tag{2.25}$$

であり，χ は共動距離，$\hat{n}$ は視線方向の単位ベクトル，$a(\chi)$ は CMB 光子が観測者から共動距離 χ 離れた位置にいるときの宇宙のスケール因子である．また $w(\chi,\hat{n})$ は，三次元共動座標 $\mathbf{x}=\chi\hat{n}$ における $n_{\rm b}$, $x_{\rm i}$ および $T_{\rm gas}$ の関数であり，以下の式で与えられている．

$$w(\chi,\hat{n}) = x_{\rm i}n_{\rm b}(T_{\rm gas}-T_\gamma)|_{\mathbf{x}} \tag{2.26}$$

カンパニエーツ方程式は，散乱に寄与する自由電子が非相対論的でマクスウェル・ボルツマン分布関数に従うという仮定の下，ボルツマン方程式をフォッカー・プランク展開することで導出される．ボース・アインシュタイン分布関数はカンパニエーツ方程式の定常解になっている．この方程式を解くと，プランク分布の低エネルギー側 (レイリー・ジーンズ領域) では光子数が減少し，高エネルギー側 (ヴィーン領域) では光子数が増加することがわかる．また興味深いことに，この光子数の増減が釣り合う振動数 (波長) はガスの温度や散乱された時期に依存せず, $x \simeq 3.83$, $\nu \simeq 218$ GHz, $\lambda \simeq 1.38$ nm で観測される．

ここで特に式 (2.25) はコンプトンの y パラメータと呼ばれ，熱的 SZ 効果によって生じる CMB の温度揺らぎと以下のように結びついている．

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) = g(\nu)y(\hat{n},t_0)\ , \tag{2.27}$$

ここで t_0 は現在時刻, $g(\nu)$ は SZ 効果の周波数依存性を示す関数であり, $g(\nu) \equiv -4+\dfrac{x(\nu)}{\tanh[x(\nu)/2]}$ と定義する．特に，周波数 ν のレイリー・ジーンズ極限 (低周波数極限) では $g(\nu\to 0) = -2$ となる．

式 (2.27) から，熱的 SZ 効果によって引き起こされる CMB 温度の角度パワースペクトルは

$$C_\ell = \left(\frac{g_\nu k_{\rm B}\sigma_{\rm T}}{m_{\rm e}c^2}\right)^2 \int d\chi \frac{P_w(\chi,\ell/\chi)}{\chi^2}\ , \tag{2.28}$$

とかける．この時 l は多重極モーメントであり，$P_w(\chi,k)$ は共動距離 χ におけるコンプトンの y パラメータの三次元パワースペクトルである．式 (2.26) で定義された w を計算することで $P_w(\chi,k)$ が求まる．また，式 (2.28) を導出する上で，リンバー近似 (天球面を平坦だとする近似) を用いている．この仮定は，l が大きいモードを計算する上で正確である．より詳細な SZ 効果の説明については，例えば [147] などを参考にされたい．

第 3 章

構造形成の線形理論

晴れ上がり以降の宇宙では，バリオンとダークマターの揺らぎが重力不安定性によって成長し，やがて恒星，銀河，銀河団，および大規模構造などの多様な構造が形成される．構造形成の初期段階，および大スケールの構造については線形近似による見積りによってよく説明できることがわかっている．そこでまず線形理論による密度ゆらぎの時間発展方程式を導出することを目標とする．この章を執筆するにあたっては，文献 [104] の II 章を参照にした．

3.1　ニュートン重力の妥当性

膨張宇宙における物質の分布のばらつきは，一般相対論の近似であるニュートン力学で扱える．ただし，この近似は，

$$
\begin{aligned}
\text{系のシュヴァルツシルト半径} &< \text{ニュートニアンで近似できる系のサイズ} \\
&< \text{宇宙のホライズンのサイズ}
\end{aligned}
$$

というスケールに限られる．ホライズンより大きい領域の物質は潮汐力によってのみ，間接的にホライズン内の物質に影響を及ぼす．このことは 1931 年にルメートルによって明らかにされたが [86]，ニュートニアン近似は限定的なモデルであるということが当時から認識されていたわけではない．ともかくニュートン重力を用いて得られた結果は重要となるから，ここでは上記のスケールで議論を行う．

以下では一般相対性理論から議論を始めて，弱重力場近似および非相対論近似をとることでニュートン重力におけるポアソン方程式と運動方程式を導く．まず，dx^i で定義された時空における計量テンソル $g_{ij}(x)$ の定義 (2.2) を思い出そう．ここで $g_{ij}(x)$ は明らかに 2 階 4 元のテンソルであるが，非対角成分の対称性から独立な成分は 10 個のみであることを断っておく．時空間を張る座標が $x^i \to y^i = y^i(x^j)$ のように変化すると，計量テンソルの各成分 $g_{ij}(x)$ と二つの事象の座標間隔 dx^i は以下に従って変化する．

$$
g_{ij}(x) \to g'_{ij}(y) = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^l}{\partial y^j} g_{kl}(x), \qquad dx^i \to dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j \tag{3.1}
$$

簡単な計算によって，ds は不変であることがわかる．これは物理的なモノサシや時計によらず線素 (時空間の距離) は不変であるということである．

時空が平坦であれば，g_{ij} はミンコフスキー計量に一致し，

$$g_{ij} = \eta_{ij} = \mathrm{diag}\,(-c^2, 1, 1, 1) \tag{3.2}$$

で表される対角行列となる．もちろん，一般には曲がった時空において式 (3.2) は成立しない．ただし，座標変換を行うことにより，局所的に g_{ij} とその一階微分 $g_{ij,k} \equiv \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ がミンコフスキー時空と一致するような修正を行うことは可能である．すなわち，

$$g'_{ij} = \eta_{ij}, \qquad g'_{ij,k} \equiv \frac{\partial g'_{ij}}{\partial y^k} = 0 \tag{3.3}$$

で表される $10 + 4 \times 10 = 50$ 本の独立な式を満たすように変形式の係数

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\,, \qquad \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j \partial y^k} \tag{3.4}$$

を選ぶ．この係数は $4 \times 4 + 4 \times 10 = 56$ 個あるから，縮退を解いて係数を完全に決定するためには独立な 6 本の式がさらに必要である．そこで一階微分と二階微分の係数に

$$\frac{\partial^3 x^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l} \tag{3.5}$$

を加えた，$56 + 4 \times 20 = 136$ 個の係数を選ぶことにより，先ほどの 50 本の式に $g_{ij,kl} = 0$ となるような $10 \times 10 = 100$ 本の式を加えた，合計で 150 本の式が満たされるようにすることを考える．しかし，満足しなければいけない式の数よりも係数の数の方が少ないため，一般的にこれは可能ではない．

別の方法を考えよう．とある観測者の経路に沿って g_{ij} の成分が式 (3.3) をみたすためには，経路に沿った 10 本の式 $g_{ij} = \eta_{ij}$ と経路に垂直な微分が 0 になるような $10 \times 3 = 30$ 本の条件式の合計 40 本の式を満足しなければならない．そのために 16 個の係数 $\partial y^i/\partial x^j$ と経路に垂直な $4 \times 6 = 24$ 個の y の二階微分を選べば，満たすべき方程式の数と係数の数が一致する．したがって原理的にはこの方法で局所ミンコフスキー時空に座標変換を行うことができる．観測者の経路，すなわち $x^i(\lambda)$ が与えられれば，新たな座標での経路が以下のように決定できる．

$$\frac{dy^i}{d\lambda} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{d\lambda} \tag{3.6}$$

観測者が自由運動をすると仮定すれば，その経路は以下の測地線方程式に従う．

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dy^j}{ds}\right) = \frac{1}{2}\, g_{jk,i}\frac{dy^j}{ds}\frac{dy^k}{ds} \tag{3.7}$$

出発点での座標は観測者が $y^\alpha = 0$ で静止していると仮定して，

$$\frac{dy^i}{ds} = \delta^i_0, \tag{3.8}$$

がみちびけて，式 (3.3) と (3.7) から

$$\frac{d^2y^i}{ds^2}=0, \tag{3.9}$$

が与えられるので，観測者は $y^\alpha=0$ にとどまる．

これらの局所的なミンコフスキー座標で経路の近くにおける線素は

$$ds^2=c^2dt^2-(dx^2+dy^2+dz^2), \tag{3.10}$$

となるから，局所的には新座標が固有間隔と一致するような時間と空間の間隔の座標と直交している．そしてもちろん原点での自由粒子の加速度は 0 なので，重力による加速度は変形によってずれてしまう．粒子の世界線から小さな距離 r 離れて測定される加速度は場の方程式によって以下のように記述される．

経路の周りの領域では計量テンソルが以下のように書ける．

$$g_{ij}=\eta_{ij}+h_{ij}, \tag{3.11}$$

ここで h_{ij} は小さく，$h_{ij}\sim r^2$ である．このような領域では弱重力場の線形近似によってアインシュタインの場の方程式が単純になる (このことは g の二階微分がどれだけ大きくても適用できる．なぜなら場の方程式では二階微分は一次にのみ現れ，また x が十分小さければ $g_{,i}g_{,j}$ のような非線形の項は $g_{,ij}$ に比べて無視できるからである)．局所ミンコフスキー時空では経路 $x^\alpha\equiv 0$ に沿った g_{ij} と $g_{ij,\alpha}$ の時間全微分が 0 になることを用いると，いわゆる弱重力場近似によって以下を得ることができる (この点については文献 [84] を参照していただきたい)．

$$\begin{aligned}R_{00}&=-\frac{1}{2}\eta^{ij}(h_{ij,00}-h_{i0,j0}-h_{j0,i0}+h_{00,ij})=\nabla^2_{\mathbf{r}}\Phi,\\ g_{00}&=c^2+2\Phi.\end{aligned} \tag{3.12}$$

そうすると質量密度 ρ，圧力 p，速度 $v\ll c$ の理想流体の場の方程式の 00 成分は以下のようになる．

$$\nabla^2_{\mathbf{r}}\Phi=4\pi G(\rho+3p/c^2)-\Lambda. \tag{3.13}$$

宇宙定数 Λ が完全性のために加えられているが，以下では特に断らない限り，Λ は 0 とする．

$v\ll c, h\ll 1$ の極限における測地線の方程式 (3.7) は

$$\frac{d^2r^\alpha}{dt^2}=-\Phi_{,\alpha}. \tag{3.14}$$

となる．式 (3.13) と (3.14) はニュートン力学の標準的な方程式であるが，以下のような状況は例外である: 背景放射が存在すれば重力的な質量が圧力と結びつくことを考慮に入れなければならない．またもちろん $\Lambda\neq 0$ であれば位置 $\mathbf{r}$ 隔てた粒子の間に $\dfrac{\Lambda\mathbf{r}}{3}$ の力が働く．

状況にも依存するが，式 (3.13) と (3.14) は特異点の外側にいる任意の観測者に適用できる．これらの方程式が適用される内側の領域には物質がたくさん存在しなくても良い．この領域は，以下により拡張することができる．遠く離れた物質に対して観測者が静止するように観測者に g_α の

加速度を与え，また Φ に $g_\alpha r^\alpha$ の項を加えて，近くの観測者から得られる結果を合わせる．このやり方 (すなわち加速度とポテンシャルに項を付加するやり方) は，観測者と物質の相対速度が $\ll c$ であり，式 (3.12) で $\Phi \ll c^2$ であればうまくいく．大きさ R の領域にふくまれている質量が $M \sim \rho R^3$ で ρ がおおよそ均一であれば，この二つ目の条件は

$$G\rho R^2 \ll c^2 \tag{3.15}$$

となる．フリードマン・ルメートルモデルでは (Λ を無視して密度パラメータを $\Omega \sim 1$ とすれば) ハッブル定数が

$$H \sim (G\rho)^{1/2}, \tag{3.16}$$

となるから，式 (3.15) によって

$$R \ll cH^{-1} \sim 3000 \text{ Mpc} \sim 10^{28} \text{ cm}. \tag{3.17}$$

となる．つまり，その領域はハッブル長に比べて小さくなければならない．その膨張速度は $v = Hr$ なので，この条件は $v \ll c$ と等価である．

もしもその領域に中性子星やブラックホールなどのコンパクト天体を含めるならば，ニュートン近似ははるかに小さいスケールでも破綻する．ただしこのような天体のシュバルツシルト半径よりも十分大きいスケールでは，いわゆるニュートニアンの質点として扱える．例えば天の川銀河の中心には質量 10^9 $\mathrm{M}_\odot$ ほどのブラックホールがあると示唆されていて，そのシュバルツシルト半径は $\sim 10^{14}$ cm である．もしもこれを上限値とするなら，ニュートン力学は以下のスケールで良い近似であるといえる．

$$10^{14} \text{ cm} \ll \mathrm{r} \ll 10^{28} \text{ cm} \tag{3.18}$$

3.2 共動座標の導入と特異速度

物質の分布と運動は均一で等温状態の世界モデルで記述することが有用であることが多い．この背景のモデルにおいて 2 粒子の隔たりの時間変化は以下のようになる．

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x} \tag{3.19}$$

ここで均一性と等温性のために $\mathbf{x}$ は一定であり，膨張のパラメータ $a(t)$ はスケール因子と呼ばれ，固有時間の関数で不変であるとみなす．議論を簡単にするために $p \ll \rho c^2$, $\Lambda = 0$ を仮定する．そうすると式 (3.13) から背景のモデルにおいて $\mathbf{r} = 0$ にいる観測者が

$$\Phi_b = 2/3\pi G\bar{\rho}(t)r^2$$

というポテンシャルを観測することになる．ここで $\bar{\rho}(t)$ は平均の質量密度である．式 (3.19) を運動方程式 (3.14) に用いると，宇宙論的な方程式

$$\frac{da^2}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}(t)a \tag{3.20}$$

が得られる．

式 (3.19) は固有の局所ミンコフスキー座標 $\mathbf{r}$ から，膨張する背景モデルとともに動く座標 $\mathbf{x}$ への変数変換である．後者の座標において粒子の原点からの固有速度は

$$\mathbf{u} = a\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}\dot{a} \tag{3.21}$$

であり，よって粒子の運動に対するラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(a\dot{\mathbf{x}} + \dot{a}\mathbf{x})^2 - m\Phi(\mathbf{x}, t) \tag{3.22}$$

となる．さらに以下の正準変換を行い，ラグランジアンを簡単にできる．

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - d\psi/dt, \qquad \psi = \frac{1}{2}ma\dot{a}x^2 \tag{3.23}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ma^2\dot{x}^2 - m\phi \tag{3.24}$$

ここで

$$\phi = \Phi + \frac{1}{2}a\ddot{a}x^2 \tag{3.25}$$

である．また場の方程式 (3.13) は，新たなポテンシャル ϕ について

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho a^2 + 3a\ddot{a} \tag{3.26}$$

となり，ここで勾配は $\mathbf{x}$ についてとる (式 (3.13) での勾配は $\mathbf{r} = a\mathbf{x}$ についてのものである)．式 (3.20) を用いるとこれはさらに

$$\nabla^2\phi = 4\pi G a^2[\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)] \tag{3.27}$$

となる．

一方，式 (3.24) から運動方程式は

$$\mathbf{p} = ma^2\dot{\mathbf{x}}, \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -m\nabla\phi. \tag{3.28}$$

粒子の特異速度は

$$\mathbf{v} = a\dot{\mathbf{x}} \tag{3.29}$$

となる．これは粒子の位置 $\mathbf{x}$ に固定された観測者によって測定される速度である．つまり，$\mathbf{v}$ は背景モデルに相対的な運動である．式 (3.28) に従うと

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\nabla\phi}{a} \tag{3.30}$$

となる．$\phi \equiv 0$ とすれば，$\mathbf{p}$ は一定であり $\mathbf{v}$ は a^{-1} にしたがって減少していく．このことは宇宙によってもたらされる力だと考えるべきではない．単に座標を変換したことの結果だと考えるべきである．特異速度 $\mathbf{v}$ は背景モデルとともに動く観測者に対して相対的に測定されるものだ．自由

運動する粒子は，全体的な膨張によって粒子から遠ざかる共動系の観測者に追いつこうとする．そのため $\mathbf{v}$ は小さくなるのである．

ϕ のソースは式 (3.27) の定数 $\rho - \bar{\rho}$ である．このことの理由は，もしも全く不均一性がなければ $\rho - \bar{\rho}$ は 0 になり，それぞれの粒子は摂動を受けずに位置 x にとどまるというのと同様である．

もしかしたら非相対論的な物質の分布の不均一性に加えて，その背景に放射や質量のないニュートリノによるなめらかな海が存在するかもしれない．もしも $\phi \ll c^2$ であれば，この相対論的背景の ϕ による揺らぎは無視できるものなので，その密度は均一性がかなり高くなりうる．また Λ のことを考慮に入れると，式 (3.13) と (3.14) から式 (3.20) が次のようになり，

$$\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}\left[\bar{\rho}(t) + \frac{3\bar{p}(t)}{c^2}\right] + \frac{\Lambda}{3} \tag{3.31}$$

式 (3.26) は以下で置きかわることがわかる．

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= 4\pi G\left(\rho + \frac{3\bar{p}}{c^2}\right)a^2 - \Lambda a^2 + 3a\ddot{a} \\ &= 4\pi G[\rho - \bar{\rho}(t)]a^2 \end{aligned} \tag{3.32}$$

これまでに見たように，ϕ のソースは非相対論的な物質密度の揺らいでいる部分である．すなわち，均一な相対論的な物質分布と Λ は打ち消し合ってしまう．

3.3 特異加速度

式 (3.27) に対するポテンシャルの解は

$$\phi(\mathbf{x}) = -Ga^2\int d^3x'\,\frac{\rho(\mathbf{x}') - \bar{\rho}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}. \tag{3.33}$$

となる．$\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}$ は空間的には相関長 $\ll cH^{-1}0$ の周りに統計的に均一に揺らいでいると仮定すれば (すなわち空間的に均一で等温状態のランダム過程だとすれば)，積分は $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ がホライズンに到達するまでの一定の値に限られる．もちろん，式 (3.33) にソースのない項を加えることができる．$\phi_\alpha(t)x^\alpha$ という項は均一な加速を表していて，慣性系での速度をうまく選ぶことによって消去することができる．さらに $\phi_{\alpha\alpha} = 0$ のもとで，$\phi_{\alpha\beta}(t)x^\alpha x^\beta$ という項は，均一だが非等方な宇宙モデルにおける潮汐力を表している．しかしながら，宇宙は高い精度で等方的であることが観測されているため，この項については議論しないことにする．またこの項は長波長の重力波も表している．

重力波が無視できるとすれば，特異加速度は式 (3.30) より以下のようになる．

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\frac{\nabla\phi}{a} = Ga\int d^3x'(\rho(\mathbf{x}') - \bar{\rho})\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \tag{3.34}$$

ここで，最初に $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ を固定して角度について積分を行い，ついで $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ について積分すれば，以下のように書き直すことができて

$$\mathbf{g} = Ga \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}, \tag{3.35}$$

さらに粒子を点と見なすと

$$\rho = \Sigma m_j a^{-3} \delta(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}) \tag{3.36}$$

であり，

$$\mathbf{g} = \frac{G}{a^2} \sum m_j \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}|^3} \tag{3.37}$$

を得る．一般にはこの総和ははっきりと決めることができない．この答えが項の順序により変わるのである．式 (3.35) からいえるのは，$|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}|$ が増加する順番にその総和をとるということである．粒子の分布が，空間的にはその相関長は $\ll cH^{-1}$ であり均一で等方的にランダムな過程をとるという仮定を置くと，この総和は相対論的なホライズンの内側では有限の値に収束する．

総和についての境界条件によって，質量中心の通常の運動の保存則が修正される．Σ の表面の内側を除くすべてにおいて均一であるというモデルの宇宙を考えよう．i 番目の粒子の加速度は式 (3.30) と (3.37) で与えられる．そこで Σ について全粒子の総和をとると，この式は

$$M \frac{d}{dt} a\mathbf{V} = \frac{d}{dt} \sum m_i a \mathbf{v}_i = \frac{G}{a} \sum_i m_i \sum_j m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)/|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^3 \tag{3.38}$$

となる．総和についての条件から，順番を入れ替えられないので結論として式を消すことはできない．総和を密度 $\rho(x) = \bar{\rho} + \delta\rho(x)$ の積分に変えれば

$$M \frac{d}{dt} a\mathbf{V} = Ga^5 \bar{\rho} \int d^3x \int d^3x' \delta\rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x}' - \mathbf{x})/|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3 \tag{3.39}$$

を得る．この積分は Σ の領域について行う．ここでは積分の順番を入れ替えられる．つまり積分の消去は $\Sigma \to \infty$ の極限においてのみ実行しなければならない．

最終的に，式 (3.24) を宇宙の全粒子のラグランジアンに一般化しよう．式 (3.33) と (3.36) は以下の式を与える．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \Sigma 1/2 m_j a^2 \dot{x_j}^2 - U, \\
U &= -\frac{Ga^5}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 (\rho_1 - \bar{\rho})(\rho_2 - \bar{\rho})/|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|
\end{aligned} \tag{3.40}$$

ここで積分は $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ を除外する．U に $1/2$ のファクターが出るのは，$\mathbf{x}_1$ についてと $\mathbf{x}_2$ についての積分でそれぞれの粒子について 2 回ずつカウントしているからである．

3.4 物質のふるまいに関する二つの見方

物質について標準的で便利な二つのモデルがある．一つ目は粒子の平均自由行程が短く，物質が理想流体として記述できることを仮定している．他方は粒子は重力によってのみ相互作用して，粒子の平均自由行程が非常に長いと考えている；ここでの粒子とは星や銀河である．この二つ目の場合，粒子は粒子の密度関数が滑らかに変化するようなポテンシャル中を運動すると考えられるという仮定を置いて議論している．実際には粒子同士が接近することによって，それぞれの粒子の運動は他の粒子の位置によって影響を受ける．このような近接衝突 (あるいは散乱ともいう) は重力的に束縛された系の力学に影響を与える場合がある．

3.4.1 ブラソフ方程式

同一種類の粒子でできた海を考え，それぞれの粒子は空間的に滑らかな密度関数のポテンシャル ϕ 中を衝突することなく運動するとしよう．粒子の位置と運動量の分布の式 (3.28) は

$$dN = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3x d^3p \tag{3.41}$$

となる．ここから物理的な質量密度は

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= ma^{-3} \int d^3p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ &\equiv \bar{\rho}(t)[1 + \delta(\mathbf{x}, t)] \end{aligned} \tag{3.42}$$

である．ここで $\bar{\rho}$ は一様な背景の密度であり，$\bar{\rho} \propto a(t)^{-3}$ である．また m は粒子の質量で，a^{-3} の因子は物理的な空間密度への変換を表しており，δ は無次元の密度比である．

リウビルの定理より f は位相空間において粒子の経路に沿って定数であるので，式 (3.28) を用いることで

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{ma^2} \cdot \nabla f - m\nabla\phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{3.43}$$

この式と (3.42) 及び (3.27) で完全に記述できる．

標準的には式 (3.43) は速度についてモーメントをとることで取り扱う．$\mathbf{p}$ について積分して式 (3.42) を用いた結果は

$$a^3 \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \nabla \cdot \int \mathbf{p} f d^3p = 0 \tag{3.44}$$

式 (3.43) の最後の項は部分積分によって消えてしまう．局所的な平均速度，あるいは流速は

$$\mathbf{v} = \frac{\int (\mathbf{p}/ma) f d^3p}{\int f d^3p} \tag{3.45}$$

であり，これによって式 (3.44) は

$$\bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \tag{3.46}$$

となる．式 (3.43) の一次のモーメントは式に $\mathbf{p}$ を掛けて運動量で積分することで得られて，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int p_\alpha f d^3p + \frac{1}{ma^2}\partial_\beta \int p_\alpha p_\beta f d^3p + a^3\rho(\mathbf{x},t)\phi_{,\alpha} = 0 \tag{3.47}$$

となる．この表式と式 (3.44) から以下が導ける．

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot a}{a}\frac{\partial\delta}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\nabla\cdot[(1+\delta)\nabla\phi] + \frac{1}{\bar\rho m a^7}\partial_\alpha\partial_\beta\int p_\alpha p_\beta f d^3p \tag{3.48}$$

$\mathbf{x}$ の周りにおける粒子の速度の積 $v^\alpha v^\beta$ の平均値は

$$\langle v^\alpha v^\beta\rangle = \frac{\int f p^\alpha p^\beta d^3p}{m^2a^2\int f d^3p} \tag{3.49}$$

であり，これを式 (3.48) にいれると以下が得られる．

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot a}{a}\frac{\partial\delta}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\nabla\cdot[(1+\delta)\nabla\phi] + \frac{1}{a^2}\partial_\alpha\partial_\beta[(1+\delta)\langle v^\alpha v^\beta\rangle] \tag{3.50}$$

3.4.2 理想流体

標準的な理想流体の流体方程式は

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + \nabla_{\mathbf{r}}\cdot\rho\mathbf{u} = 0$$

$$\rho\left[\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + (\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})\mathbf{u}\right] = -\nabla_{\mathbf{r}}p - \rho\nabla_{\mathbf{r}}\Phi \tag{3.51}$$

で，添字の $\mathbf{r}$ はとある原点からの物理的距離が $\mathbf{r}$ であるような空間変数であり，$\mathbf{u}$ は原点からの共動系での相対速度である．式 (3.21) や (3.29) を用いると，$\mathbf{u}$ は特異速度 $\mathbf{v}$ と以下のように関係づけられる．

$$\mathbf{u} = \dot a\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \frac{\dot a}{a}\mathbf{r} + \mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{r}}{a},t\right) \tag{3.52}$$

物理座標 $\mathbf{r}$ から共動座標 $\mathbf{x} = \mathbf{r}/a$ への座標変換をすると，質量保存の式 (3.51) の第一項は次のようになり，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}}\rho\left(\frac{\mathbf{r}}{a(t)},t\right) = \frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\dot a}{a}\mathbf{x}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\rho \tag{3.53}$$

第二項は式 (3.52) を用いて

$$\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\rho\mathbf{u} = \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\rho\mathbf{v} + \frac{3\dot a}{a}\rho + \frac{\dot a}{a}\mathbf{x}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\rho \tag{3.54}$$

よって式 (3.53) と式 (3.53) の和をとると，式 (3.51) の第一式の左辺は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + 3\frac{\dot a}{a}\rho + \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{3.55}$$

これは膨張する座標系での質量保存則を表す式である．同様の座標変換を式 (3.51) の第二式にも施すとその結果は

$$\ddot{a}\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{a}(\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{v} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho a}\nabla_{\mathbf{x}}\, p - \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}\left(\phi - \frac{1}{2}a\ddot{a}x^2\right) \tag{3.56}$$

となる．ここで右辺のポテンシャルは式 (3.25) に従って ϕ に書き換えた．そうすると左辺の一番左の項と右辺の一番右の項がキャンセルすることがわかる．式 (3.55) に対しては，式 (3.42) で定義した無次元の密度揺らぎ δ を用いることにより変形できて，最終的な膨張する座標系における流体方程式は以下のようになる．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{a}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho a}\nabla p - \frac{1}{a}\nabla\phi \\ &\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla\cdot(1+\delta)\mathbf{v} = 0\end{aligned} \tag{3.57}$$

この方程式 (3.58) はブラソフ方程式 (3.46) および (3.47) と比較できる．式 (3.30) も同様である．座標が膨張することにより $\dfrac{\dot{a}}{a}\mathbf{v}$ の項が生じて，特異加速度 $\nabla\phi$ のソースは密度揺らぎ $\bar{\rho}\delta$ となる．3.2 節でも述べたように，この方程式は $\Lambda \neq 0$ のとき，相対論的物質の一様な背景があるときに適用される．

式 (3.58) は (3.50) に対応する一つの式にまとめることができる．第一式に ρ をかけて第二式に $\mathbf{v}$ をかけて足し合わせることにより

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^{\alpha}) + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(\rho v^{\alpha}v^{\beta}) + 4\rho v^{\alpha}\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\nabla p}{a} - \rho\frac{\nabla\phi}{a} \tag{3.58}$$

この式の発散をとると

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\nabla^2 p}{\bar{\rho}a^2} + \frac{1}{a^2}\nabla\cdot(1+\delta)\nabla\phi + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}[(1+\delta)v^{\alpha}v^{\beta}] \tag{3.59}$$

となる．式 (3.50) や式 (3.59) を適用する際には，最後の項をどう取り扱うか考えなければならない．次節で議論する線形近似ではこの項が落ちる．線形近似の仮定においては $\mathbf{p}$ の分布に平均からの歪度 (非対称性) がないと近似できる．(詳しくは [144, 33] を参照せよ．)

3.5 揺らぎの線形方程式

引き続き，ここでは物質の質量密度が背景の一様成分からわずかにしか揺らいでいないと仮定する．このことは比較的初期の宇宙においては正しい仮定であろう．さらに，この線形近似から導かれる結果は，小スケールで強い非線形の構造 (恒星や銀河など) が存在するような時期でさえ，大スケールでの物質のふるまいは概ね正しく記述できる．

d を δ の空間的な揺らぎの長さ，v を特徴的な流体流速，$t \sim (G\rho)^{-1/2}$ を膨張のタイムスケールとして

$$\delta \ll 1, \qquad \left(\frac{vt}{d}\right)^2 \ll \delta \tag{3.60}$$

ならば，式 (3.58) および式 (3.59) は線形摂動の方程式

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\nabla^2 p}{\bar{\rho} a^2} + 4\pi G\bar{\rho}\delta, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{3.61}$$

に変形できる．平均自由行程の長い粒子を記述するブラソフ方程式 (3.46) と (3.50) はこの近似においては以下のようになる．

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G\bar{\rho}\delta, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{3.62}$$

ここで流速 $\mathbf{v}$ に加えて，粒子の平均速度 v_0 が存在して，式 (3.50) からその条件は

$$\frac{v_0 t}{d} \ll 1 \tag{3.63}$$

となる．理想流体の場合は粒子の微視的速度の平均値である v_0 が存在していて，それが上の条件を破っていれば δ は音波のように振動する．もちろん，このとき粒子の平均自由行程が d より長ければ，粒子が不規則分布を通り越えて運動するから δ がなくなってしまい，上で述べたことは正しくない．

相対論的な背景の質量密度が無視できるような時に方程式 (3.62) の解を導くためには，ルメートルの考えた方法が有用である．これは圧力を 0 として揺らぎが球対称であり，それぞれのシェルが異なる均一な宇宙モデルの中で運動しているという仮定を置く方法である (これは文献 [86, 95, 87, 34, 120] などで取り扱われている)．すなわち，わずかに異なる宇宙モデルにおける $\rho(t)$ の違いを $\delta(t)$ と表すことができて，この手法を用いると $\delta(t)$ の独立な解が二つ得られる (この点については [153, 62] で述べられている)．

この手法によって式 (3.62) が導かれることはすでに見てきた．隣り合うモデルでのパラメータ $\bar{a}(t), \bar{\rho}(t)$ および $a(t), \rho(t)$ を以下のようにとる．

$$a \equiv \bar{a}(1 - \epsilon(t)), \qquad \rho a^3 \equiv \bar{\rho}\bar{a}^3, \qquad \delta = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = 3\epsilon \tag{3.64}$$

$a(t)$ についての宇宙論的方程式は式 (3.31) すなわち

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho a + \frac{\Lambda}{3}a \tag{3.65}$$

となる．式 (3.65) に式 (3.64) を代入して ϵ の線形 (比例する) 項のみを残すと

$$\frac{d^2 \epsilon}{dt^2} + 2\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}}\frac{d\epsilon}{dt} = 4\pi G\bar{\rho}\epsilon \tag{3.66}$$

が得られる．

$$\delta \propto \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} \tag{3.67}$$

$\bar{\rho} \propto a^{-3}$ を用いて，式 (3.65) を一回積分すると

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G\bar{\rho} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{R^{-2}}{a^2} \tag{3.68}$$

となる．ここで積分による定数が曲率項 R^{-2} である．

$$t = \int^a \frac{da}{X^{1/2}} - C, \qquad X = \frac{8}{3}\pi G\bar{\rho}a^3\frac{1}{a} + \frac{\Lambda a^2}{3} - R^{-2} \tag{3.69}$$

ここで C は二つ目の積分定数である．そこでこの式を時刻を固定して積分定数で微分してやると

$$0 = \frac{1}{X^{1/2}}\frac{\partial a}{\partial R^{-2}} + \frac{1}{2}\int^a \frac{da}{X^{3/2}}, \qquad 0 = \frac{1}{X^{1/2}}\frac{\partial a}{\partial C} - 1 \tag{3.70}$$

よって式 (3.67) より二つの独立な解が以下のようになる．

$$\delta_1 = \frac{X}{a}\int^a \frac{da}{X^{3/2}}\,, \qquad \delta_2 = \frac{X^{1/2}}{a} \tag{3.71}$$

a が式 (3.68) を満たしていて $\bar{\rho} \propto a^{-3}$ であれば，δ_2 が式 (3.62) の解になっていることが直接代入して計算をするとわかる．δ_1 が解になっていることは，$\delta_1 = f(a)\delta_2(a)$ とおいて代入することで簡単に確認できる．

線形理論における δ の振る舞いは局所的である．もちろん重力場は質量分布によって決まるが，δ に関係するのはその発散であり，それはやはり局所的に決まるのである．そしてこの局所性はたとえ摂動論を相対論的に計算しても失われることがない．ただし二次の摂動論では局所性が失われる．

第 4 章

原始磁場が構造形成に与える影響

この章からは本研究の主題となる原始磁場について，主に観測データとの関連を説明する．はじめに原始磁場に対して現在観測から得られている制限について議論をおこない，原始磁場が物質の密度揺らぎや温度揺らぎの進化に与える影響を考察する．

4.1 原始磁場の定式化

本研究では，個々の磁場生成の検証を行うわけではなく，一般的な定式化の下で原始磁場のモデルを特徴付けるパラメータについて制限を行う．はじめに，原始磁場の統計的な分布として一様等方性を仮定すると [57] [97] 原始磁場の二点相関関数はパワースペクトル $P_B(k)$ を用いて以下のように書ける：

$$\langle \tilde{B}_i^*(\mathbf{k})\tilde{B}_j(\mathbf{k}')\rangle = \frac{(2\pi)^3}{2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\left(\delta_{ij}-\hat{k}_i\hat{k}_j\right)P_B(k) \tag{4.1}$$

ここで $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k})$ は $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ をフーリエ変換して得られた物理量である．また単純化のために磁場のパワースペクトル $P_B(k)$ は単一の冪 n_B を用いて以下のように書けると仮定した．

$$P_B(k) = \frac{n_B+3}{2}\frac{(2\pi)^2 B_n^2}{k_n^{n_B+3}}k^{n_B} \tag{4.2}$$

ただし B_n は波数スケール k_n で規格化した磁場の強さであり，本研究では慣習的に k_n を $1\ \mathrm{Mpc}^{-1}$ とおいた．このような磁場のモデルを仮定することで，それぞれの原始磁場の生成機構に立ち入ることなく，パラメータ B_n と n_B を様々にとることで一般的に幅広い原始磁場のモデルを考慮することができる．ここで，n_B は磁場の強度のスケール依存性を表していて，$n_B = -3$ では磁場の強度はスケールによらず一定である．また n_B が大きいほど，小さいスケールでの磁場の強度が大きくなる．[*1] また，実空間においてあるスケール λ で平均化した原始磁場の強さ B_λ が以下のように

[*1] 原始磁場のパワースペクトルの定義には異なる形式も存在する．例えば文献 [51] の式 (3.8) は，初期宇宙における曲率揺らぎと類似した形式であり，このときは $n_B = 1$ でスケール不変となる．ただし，本研究ではほとんどの先行研究で採用されている形式 (4.2) を用いた．

与えられるとすると，磁場のパワースペクトルの表式 (4.2) の係数が自然と理解できる．

$$B_\lambda^2 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{k_\lambda} k^2 dk P_B(k) = B_n^2 \left(\frac{k_\lambda}{k_n}\right)^{n_B+3} , \tag{4.3}$$

ただし，$k_\lambda = 2\pi/\lambda$ である．

また初期宇宙における光子とバリオンとの衝突に伴い，小スケールでは原始磁場が光子の粘性によって散逸するため初期宇宙で生成された磁場にはカットオフが現れると考えられている [76, 130]．晴れ上がりの時刻までは光子がバリオンと衝突を絶えず繰り返していて，この光子の運動はランダムウォークであるとみなすことができる．したがって，このランダム運動で光子が進む距離程度より小さいスケールでは，晴れ上がり以前におけるバリオン流体のゆらぎが光子との衝突によってならされてしまう．この効果は 1968 年にシルクによって予言され [126]，CMB の観測で確認されている (この現象はシルクの拡散減衰と呼ばれている)．同様の機構によって小スケールでは磁場も減衰してしまうと考えられる．この磁場の減衰によるカットオフスケールの波数 k_c は，

$$k_c^{-2} = V_A^2 \frac{d_{\rm rand}^2}{c^2} = \frac{B_{\lambda_c}^2(t_r)}{4\pi\rho_\gamma(t_r)}\int_0^{t_r} \frac{l_\gamma(t')}{a^2(t')}dt' \tag{4.4}$$

と与えられる．ここで V_A はアルフヴェン速度と呼ばれる物理量で，次の式で定義される．

$$V_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}} \tag{4.5}$$

また $d_{\rm rand}$ は光子が流体中をランダムウォークによって進む距離，t_r は宇宙の晴れ上がり時刻，$l_\gamma(t)$ は時刻 t における CMB 光子の平均自由行程で，$\lambda_c = \dfrac{2\pi}{k_c}$ である．式 (4.4) の一つ目の等号は，光子がランダムウォークで進む時間にアルフヴェン波が進む距離を表している．まとめると，$k \le k_c$ では原始磁場は式 (4.2) の形で与えられていて，$k \ge k_c$ では原始磁場が存在しないものと仮定する．(実際には，考えられる原始磁場の減衰として，ニュートリノとバリオンの散乱による効果や磁気音波の減衰なども存在するが，ここでは上記のアルフヴェン波の減衰のみを考えれば十分である．このことについては文献 [76] を参照されたい．)

4.2 原始磁場の観測的制限

図 4.1 に示した通り，磁気流体力学的な乱流によるエネルギー散逸 (青色)，ブレーザー起源の高エネルギーガンマ線の観測 (赤色)，そして CMB の非等方性 (黄色) などによって原始磁場の強度には制限がかけられている．それぞれの特徴を次に述べる．まず，MHD の乱流で磁場が減衰する効果は小スケールで重要であるが，宇宙論的なスケール ($\gtrsim 1$ Mpc) ではほとんど無視できる．次に，第 1 章で述べたように，ブレーザーからのガンマ線の観測から $\sim 10^{-15}$–10^{-18} G の銀河間磁場の存在が示唆されていて，宇宙論的スケールの長さの磁場の下限値となっている．しかしながら，この銀河間磁場の起源には初期宇宙で作られた磁場が宇宙膨張によって銀河間空間に取り残された可能性と，銀河や銀河団の磁場が銀河間空間に輸送されることによって銀河間磁場ができた可

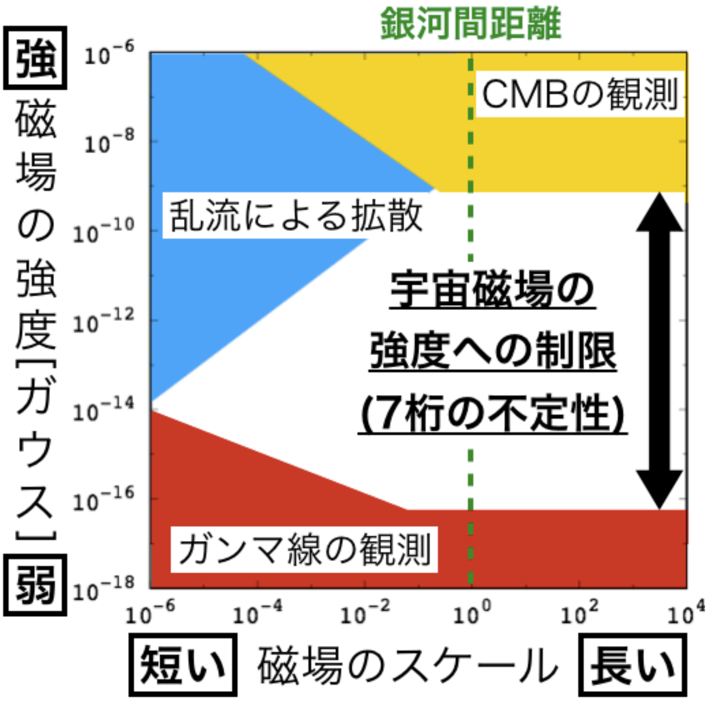

図 4.1　現在の宇宙において原始磁場に与えられている理論的な制限．横軸は磁場の相関長を表しており，単位は [Mpc] である．縦軸は磁場の強度であり，単位は [ガウス] である．

能性があり，銀河間磁場が原始磁場の直接的な証拠と言い切ることはできない．また，銀河間磁場以外の機構によってガンマ線の観測を説明しようという議論も存在している．したがって乱流による拡散やガンマ線の観測に比べて，CMB の観測は宇宙論的なスケール ($\gtrsim 1$ Mpc) では原始磁場への最も強い制限だと言える．次節以降では，原始磁場が CMB の非等方性を生成する機構，および最新の *Planck* 2015 の観測結果による原始磁場の制限についてまとめる．

4.2.1　原始磁場が生成する CMB 温度揺らぎ

原始磁場は初期宇宙において空間のゆらぎを作り，結果としてバリオン光子流体の運動に影響を与えると考えられる．この項では，確率的に揺らいでいる原始磁場が温度揺らぎや偏光に与える影響について考察する．空間のゆらぎはスカラー型・ベクトル型・テンソル型の三種類に分類することができて，理論的には原始磁場はこれらすべての種類のゆらぎを生成すると考えられる．具体的な原始磁場によるゆらぎの生成機構については多くの先行研究があり，例えばスカラーモードについて [50, 78, 151, 152, 41, 52, 53, 54, 19, 18, 82]，ベクトルモードとテンソルモードについて [133, 131, 36, 77, 92, 24, 132, 89, 23, 100, 122] などで詳しく議論されている．

さらに，原始磁場によって作られるゆらぎは原始磁場が生成された時期によって以下の三つに分類することができる．インフレーション中に作られた場合はインフレーションモード [20]，ニュートリノの脱結合以前に作られた場合はパッシブモード [89, 122]，それ以降に作られた場合はコン

ペンセイトモード [50, 41] と呼ばれる．インフレーションモードについては，インフレーションの初期条件や磁場により作られるゆらぎとインフレーションによる断熱ゆらぎの相関が重要になってくる．これらの効果についてはそれぞれ文献 [20, 75] で議論されているが，理論が複雑であるためこの論文では扱わないことにする．実際に，*Planck* 2015 の制限では磁場の生成機構を限定せず，パッシブモードとコンペンセイトモードについてのみ議論している．以下では，パッシブモードとコンペンセイトモードについて簡単に説明する．

パッシブモードは，ニュートリノの脱結合以前に原始磁場によって作られるゆらぎの種類である．この時期にはニュートリノが自由に運動しないため，原始磁場の非等方ストレスを打ち消すような流体成分は存在しない．これは共形時間 τ について対数的に成長するモードである．後述する通り，ニュートリノの脱結合以降ではニュートリノの非等方ストレスが原始磁場によって作られる非等方ストレスを最低次で打ち消す．しかしながら，この対数的に成長するモードは，インフレーションによるゆらぎの振幅に一定の相殺 (offset) を残す形でニュートリノの脱結合を生き残る．この相殺はニュートリノの脱結合の前後でゆらぎの振幅が連続するという条件によって導かれる．パッシブモードのゆらぎ $h(k)$ は，ニュートリノの脱結合時刻と原始磁場が生成された時期との比によって $h(k) \propto \ln(\tau_\nu/\tau_B)$ のように特徴づけられる (ここで τ_ν はニュートリノの脱結合時刻，τ_B は原始磁場が生成された時刻である)．パッシブモードのゆらぎは，通常の磁場を考慮しない場合と同様に成長することと，スカラー型，およびテンソル型のゆらぎにのみ影響を与えるという点でコンペンセイトモードのそれとは異なる．

コンペンセイトモードはニュートリノの脱結合以降に原始磁場が作るゆらぎである．これは通常の (すなわち共形時間 τ が有限で，かつ $\tau \to 0$ となるときの)，ニュートリノ脱結合以降において磁場の寄与を含んだ摂動アインシュタイン・ボルツマン方程式の解となっている．このモードが「コンペンセイト (compensated, 補う)」と呼ばれるのは，初期条件において原始磁場が作る計量のゆらぎが流体のゆらぎによって最低次の項が消されてしまうからである．

4.2.2 *Planck* 衛星による原始磁場の制限

この項では *Planck* 衛星の 2015 年の結果によって得られた原始磁場の制限を説明する (詳細は文献 [111] を参考にしてほしい)．*Planck* 2015 の結果は，磁場がヘリシティを持つ場合と持たない場合の両方について制限を与えているが，この項では研究との関連から，後者の場合についてのみ説明する．彼らは CosmoMC という数値計算コード [90] を拡張し，マルコフ連鎖モンテカルロ解析 (Markov Chain Monte Carlo, MCMC 解析) によって CMB の温度揺らぎを最もよく説明する原始磁場のパラメータを制限している．ここで宇宙の曲率は 0, CMB の平均温度は $T_0 = 2.7255$ K として，ビッグバン元素合成と矛盾がないように文献 [72, 63] の条件を用いている．またニュートリノの世代数は 3, 質量は無視 (相対論的粒子) として扱っている．有限の質量を持っているニュートリノが原始磁場によって作られるゆらぎに与える影響は，コンペンセイトモードの大きいスケールでのみ重要になってくることが示されているので，原始磁場の制限を大きく変えることはないと報告されている [122]．また，CMB の一次のゆらぎ (晴れ上がり以前に作られるゆらぎ) について

は重力レンズ効果を考慮して，また電波銀河などの天体からの放射による寄与も，文献 [113] に基づいて統計的に評価している．原始磁場は基本的に小角度スケールにおいて大きなゆらぎを生成するため，小角度スケールのデータの宇宙物理学的なソースによる寄与を考慮することが重要である．この寄与が原始磁場の制限の見積もりに与える影響は先行研究 [101] で議論されている．ここで，原始磁場の制限を行う際に変数として扱う宇宙論パラメータは，バリオンの平均密度 $\bar{\rho}_{\mathrm{b}}$，冷たいダークマターの平均密度 $\bar{\rho}_{\mathrm{b}}$, 再電離による光学的厚み τ_{reion}, 晴れ上がりの時刻における角径距離と音響ホライズンの比 θ_{rec}, 初期密度ゆらぎのスカラーモードの振幅 $\ln(A_s 10^{10})$ およびスペクトル指数 n_s の 6 個である．また MCMC 解析を行う際に，磁場のパラメータとしてコンペンセイトモードについては，B_n を [1,10] nG, n_B を [-2.9,3] の範囲について，パッシブモードのテンソル摂動を考える際にはそれに加えて $\tau_{\mathrm{ratio}} \equiv \dfrac{\tau_\nu}{\tau_B}$ を調べている．τ_{ratio} の値については対数刻みで $\log_{10}\tau_{\mathrm{ratio}}$ を [4,17] の範囲で調べている．

では，いよいよ *Planck* チームの解析によって得られた結果を述べる．コンペンセイトモードのみを考えると，原始磁場に対して 95% の有意水準で $B_n < 4.4$ nG という制限が得られた．また，原始磁場のスペクトル指数 n_B が正の値をとる場合に対してはきつい制限を与えることができる一方で，l が大きい領域での偏光データを含めても制限は強まらないことが示されている．実際のところ，原始磁場の CMB への影響は小角度スケールでの TT モードに対するベクトル型のゆらぎが主要な成分であり，EE モードや TE モードへの影響はそれに比べると無視できる大きさである．さらにパッシブモードのテンソル型摂動も考慮に入れても，原始磁場の強度に対する制限は向上しないことがわかったが，原始磁場のスペクトル指数 n_B に対して事後分布への影響はあるらしい．図 4.2 を見て分かる通り，パッシブモードの寄与を考慮すると，スケール不変に近い $n_B \sim -3.0$ においてはおおよそ 1 nG より大きな強度の原始磁場の存在が許されなくなる．これは，スケール不変に近いスペクトルを持った磁場によって作られるパッシブモードのテンソル型摂動は，大角度スケールでの CMB の非等方性に大きな寄与を与えるためである．また彼らは BICEP2, Keck 望遠鏡，*Planck* 衛星のデータをすべて考慮した解析も行っているが，結果は *Planck* 衛星のデータのみで行った解析と矛盾しないものであった．

Planck の原始磁場のモデルに対する尤度解析はデータの前景放射のモデルによって大きく異なる．これは原始磁場の CMB のスペクトルへの寄与が小角度スケールにおいて大きいからである．前景放射のモデルの幾つかは，磁場によって作られるゆらぎに起因するものと非常に似た角度パワースペクトルを与える．そのため原始磁場のモデルと前景放射のモデルは縮退が生じる可能性を調べる必要があった．*Planck* チームは，特に 100, 143, 143 × 217 および 217 GHz の周波数帯において，原始磁場により作られる CMB の非等方性は点状の電波源によるそれと縮退が生じると考えた．幸運なことに，その他の前景放射への寄与はスペクトルの形が異なるために縮退が生じないことがわかっている．また観測データと矛盾しないような原始磁場は宇宙論パラメータに大きな影響を与えないので，前景放射の強度は，*Planck* 衛星のデータから ΛCDM を仮定して得られた宇宙論パラメータの値で見積もった場合で固定している．この場合の極限では 95% の有意水準で $B_n < 3.0$ nG であり, 前景放射の強度を動かして制限した場合である 95% 有意水準の $B_n < 4.4$

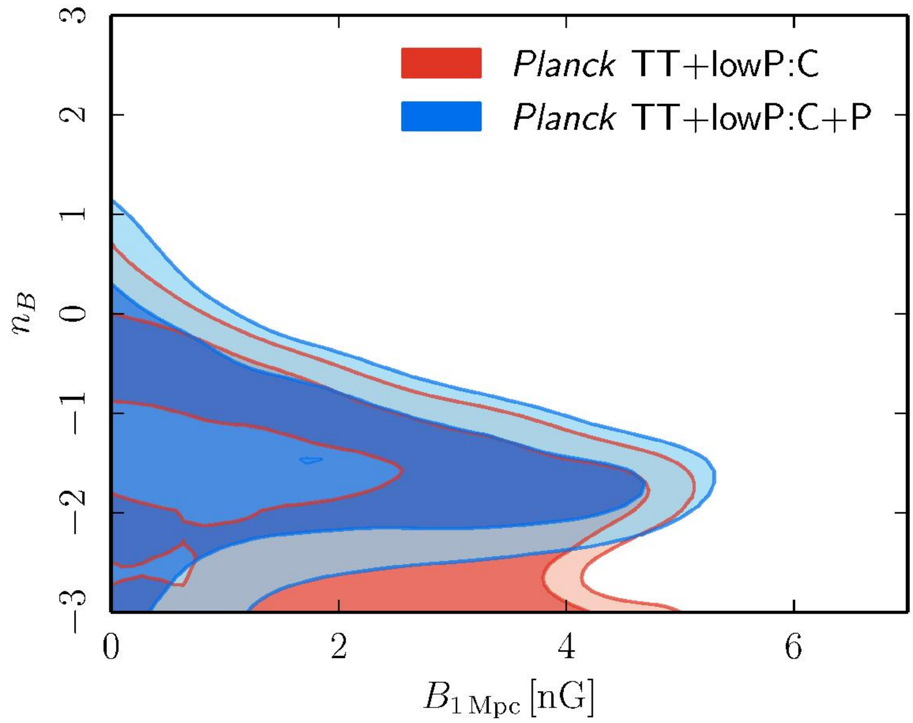

図 4.2　*Planck* 2015 のデータによって得られた，原始磁場の強度とスペクトル指数に対する制限．C+P はコンペンセイトモードとパッシブモードの両方を考慮した場合の制限を表していて，C はコンペンセイトモードのみを示している．色の濃さによってそれぞれ有意水準 68% と 95% が示されている．

nG よりもわずかに制限が強まった．

最後に，彼らが 2015 年の観測データから得られた制限と過去の 2013 年の観測による制限 [110] との比較について述べておく．2013 年の観測に比べて，2015 年のデータは上限値がわずかに大きくなった．これは，観測データの補正の仕方や観測から示唆されるパワースペクトルの傾きがわずかに変化したため，前景放射の取り扱いを考慮に入れることでより大きな強度の原始磁場を許すことが可能になったためである．

4.3　原始磁場と物質の密度進化

原始磁場が存在しない場合の構造形成の理論については，すでに第 3 章で述べた．そこでこの節では，晴れ上がり以降に原始磁場によって作られる密度ゆらぎを考慮に入れた場合の線形ゆらぎの方程式を解くことを考える．ただし簡単のため，密度ゆらぎの成長に伴う磁場構造の時間進化は考えない．この近似は質量-フラックス分布の保存を破っているように思えるかもしれないが，密度ゆらぎが線形領域である限りは有効である．

4.3.1 密度揺らぎの時間発展方程式

時刻 t におけるダークマターとバリオンの密度揺らぎをそれぞれ $\delta_{\rm c}, \delta_{\rm b}$ とすると，ジーンズスケールより大きいスケールでの密度揺らぎの時間発展方程式は以下のようになる．

$$\ddot{\delta}_{\rm c}(t) + 2\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\delta}_{\rm c}(t) - 4\pi G[\rho_{\rm c}(t)\delta_{\rm c}(t) + \rho_{\rm b}(t)\delta_{\rm b}(t)] = 0 \tag{4.6}$$

$$\ddot{\delta}_{\rm b}(t) + 2\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\delta}_{\rm b}(t) - 4\pi G[\rho_{\rm c}(t)\delta_{\rm c}(t) + \rho_{\rm b}(t)\delta_{\rm b}(t)] = S(t) \tag{4.7}$$

ここで $\dot{}$ は時間微分を表し，$S(t)$ は磁場による密度揺らぎのソース項

$$S(t) = \frac{\nabla\cdot[\nabla\times\mathbf{B}(t_0)]\times\mathbf{B}(t_0)}{4\pi\rho_{\rm b}(t_0)a^3(t)} \tag{4.8}$$

である (ここで t_0 は現在の時刻を表す)．

いまダークマターとバリオンを合わせた全物質の密度を $\rho_{\rm m}(t) = \rho_{\rm c}(t) + \rho_{\rm b}(t)$ として，全物質の密度揺らぎを $\delta_{\rm m}(t) \equiv \dfrac{\rho_{\rm c}(t)\delta_{\rm c}(t) + \rho_{\rm b}(t)\delta_{\rm b}(t)}{\rho_{\rm m}(t)}$ と定義すると，2 式から $\delta_{\rm m}(t)$ について閉じた方程式が以下のように得られる．

$$\ddot{\delta}_{\rm m}(t) = -2\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\delta}_{\rm m}(t) + 4\pi G\rho_{\rm m}(t)\delta_{\rm m}(t) + \frac{\rho_{\rm b}(t)}{\rho_{\rm m}(t)}S(t) \tag{4.9}$$

この方程式の一般解を求めるために，$S(t) = 0$ としたときの斉次方程式の特解を $D_1(t)$ および $D_2(t)$ としてグリーン関数法を用いる．最終的に，一般解は

$$\delta_{\rm m}(t) = AD_1(t) + BD_2(t) - D_1(t)\int_{t_i}^{t} dt'\frac{S(t')D_2(t')}{W(t')} - D_2(t)\int_{t_i}^{t} dt'\frac{S(t')D_1(t')}{W(t')} \tag{4.10}$$

となる．いま，A および B は定数であり，$\delta_{\rm m}$ および $\dot{\delta}_{\rm m}$ の初期条件によって決まる．また，$W(t)$ はロンスキー行列式で，$W(t) = D_1(t)\dot{D}_2(t) - D_2(t)\dot{D}_1(t)$ である．ちなみに積分区間の初期時刻 t_i は再結合時刻 $z \sim 1089$ だと考えてよい．なぜならこの時刻以前ではバリオンはトムソン散乱を通して光子と強く結合しており，バリオンの運動は光子の圧力に支配されていて，ガスの密度揺らぎはほとんど成長しないと考えられるからである．

4.3.2 物質優勢期におけるバリオン密度揺らぎ

以降では，物質優勢期を仮定して式 (4.9) の斉次解を求める．曲率と宇宙項が存在しない場合のフリードマン方程式は

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_{\rm m}(t_0)}{a^3(t)} = -\frac{1}{2}H^2(t) \tag{4.11}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_{\rm m}(t_0)}{a^3(t)} = H^2(t) \tag{4.12}$$

である (煩わしいので一部 (t) を省略する)．ここで，式 (4.12) を時間微分すると

$$\frac{\dddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} = 4\pi G \frac{\rho_{\mathrm{m}}(t_0)}{a^4}\dot{a} \tag{4.13}$$

であり，ここに $\dfrac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H}$ および $\dfrac{\dddot{a}}{a} = \ddot{H} + H^3 + 3H\dot{H}$ を代入することで

$$\ddot{H}(t) + 2H(t)\dot{H}(t) = 4\pi G\rho_{\mathrm{m}}(t)H(t) \tag{4.14}$$

を得る．そこでこの式と式 (4.9) を比較すると，$\delta_{\mathrm{m}}(t) = H(t)$ は斉次解の一つであるから，これを $D_1(t)$ とおく．次に，$D_2(t) = D_1(t)f(t) = H(t)f(t)$ として，式 (4.9) に代入すると，$f(t)$ についての微分方程式が以下のように得られる．

$$H(t)\ddot{f}(t) + 2(H^2(t) + \dot{H}(t))\dot{f}(t) = 0 \tag{4.15}$$

これを解くと

$$f(t) \propto \int \frac{dt}{\dot{a}^2(t)} \tag{4.16}$$

ここで，物質優勢期においては式 (4.12) より

$$H(t) \propto a^{-\frac{3}{2}}(t) \quad \Leftrightarrow \quad a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \tag{4.17}$$

であることがわかる．よって $f(t)$ と t の関係は $f(t) \propto t^{\frac{5}{3}}$ と求められる．以上より，改めて式 (4.9) の斉次解は

$$D_1(t) \propto t^{-1}, \qquad D_2(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \tag{4.18}$$

と定義することができる．

この方程式から $\delta_{\mathrm{m}}(t)$ の非斉次な解を求めると

$$\delta_{\mathrm{m}}(t) = \frac{3}{5}\frac{\Omega_{\mathrm{b}}}{\Omega_{\mathrm{m}}}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{t}{t_i}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{t}{t_i}\right) - \frac{5}{2}\right]S(t_i)t_i \tag{4.19}$$

最終的に，$\delta_{\mathrm{b}}(t)$ の解は $\eta \equiv \dfrac{t}{t_i} = \left(\dfrac{a}{a_i}\right)^{\frac{3}{2}}$ を用いて以下のように書ける．

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{b}}(t) &= S_i t_i^2\left[\left(\frac{9}{10}\eta^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{5}\eta^{-1} - 3\ln\eta\right)\frac{\Omega_{\mathrm{b}}}{\Omega_{\mathrm{m}}} + 3\ln\eta + 9\left(1 - \frac{\Omega_{\mathrm{b}}}{\Omega_{\mathrm{m}}}\right)\eta^{-\frac{1}{3}} - \left(9 - \frac{15}{2}\frac{\Omega_{\mathrm{b}}}{\Omega_{\mathrm{m}}}\right)\right] \\
&= \frac{2}{15}H^{-2}(t)\frac{\nabla\cdot\mathbf{L}_0}{4\pi\rho_{\mathrm{b},0}a^3(t)}\left[\left\{3\left(\frac{a(t)}{a_i}\right) + 2\left(\frac{a(t)}{a_i}\right)^{-\frac{3}{2}} - 15\ln\left(\frac{a(t)}{a_i}\right)\right\}\frac{\Omega_{\mathrm{b}}}{\Omega_{\mathrm{m}}}\right. \\
&\qquad \left. + 15\ln\left(\frac{a(t)}{a_i}\right) + 30\left(1 - \frac{\Omega_{\mathrm{b}}}{\Omega_{\mathrm{m}}}\right)\left(\frac{a(t)}{a_i}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(30 - 25\frac{\Omega_{\mathrm{b}}}{\Omega_{\mathrm{m}}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

式 (4.20) を用いて，計算領域のそれぞれの場所でバリオンの密度揺らぎを計算する．

4.4　原始磁場と物質の熱的進化

晴れ上がり以降に原始磁場が存在し続けると，バリオンガスの密度ゆらぎだけでなく温度の進化にも影響することが指摘されている．晴れ上がり以降は宇宙のガスのほとんどが中性化するが，電離している粒子もわずかに存在し続ける．原始磁場はローレンツ力を通じてこのわずかな荷電粒子に作用するが，中性粒子の運動には直接的には影響しない．従ってこれらの二成分の流体には本質的に相対速度が生まれる．また，中性粒子と荷電粒子は衝突によってエネルギーを交換するため，衝突の際の摩擦力が仕事をしてガスの熱エネルギーを増加させる．この過程は双極性散逸と呼ばれ，宇宙論的なスケールにおいても重要な役割を担うと考えられている．この節では，原始磁場による双極性散逸を考慮した上で，晴れ上がり以降でのバリオンガスの熱史，および電離史に対する簡単なモデルを説明する．

4.4.1　原始磁場と双極性散逸

以下では，文献 [125] の 27 章に従って，弱電離近似を用いて双極性散逸によるガスの加熱率を計算する．これは電離度を $x_{\rm i}$ として $x_{\rm i} \ll 1$ であるとみなす近似である．宇宙の晴れ上がり以降，IGM がほとんど中性化した時代においてはこの近似は正しいが，電離度が高くなるとより正確な見積もりが必要となる．この，双極性散逸による加熱率の一般的な形式の導出は他の文献 (例えば [30]) を参考にしてほしい．

まず，単位体積あたりのローレンツ力は CGS 単位系において

$$\mathbf{f}_{\rm L} = \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \tag{4.21}$$

と表される．このローレンツ力は荷電粒子には作用するが，中性粒子には直接作用しない．このため部分電離したプラズマが磁場中を運動すると，一般的に二つの成分の間には相対速度が生まれる．そうすると，荷電粒子と中性粒子はミクロにはクーロン力が作用し，衝突を起こすため摩擦が発生する．ここで，イオンは自由電子に比べて静止質量が大きいために，運動量輸送の主要な役割を担うと考える．よって，中性粒子の質量密度を $\rho_{\rm n}$, 荷電粒子の質量密度を $\rho_{\rm i}$, それぞれの流体速度を $\mathbf{u}_{\rm n}$，および $\mathbf{u}_{\rm i}$ とすると，単位体積あたりの摩擦力 $\mathbf{f}_{\rm d}$ は

$$\mathbf{f}_{\rm d} = \xi \rho_{\rm n} \rho_{\rm i} (\mathbf{u}_{\rm i} - \mathbf{u}_{\rm n}) \tag{4.22}$$

と表される．ただし ξ は流体の二つの成分の抗力係数 (drag coefficient) である．この係数は，ミクロには粒子の質量 $m_{\rm n}$ および $m_{\rm i}$，衝突の散乱断面積 $\sigma_{\rm col}$，流体の相対速度 $(\mathbf{u}_{\rm i} - \mathbf{u}_{\rm n})$ によって決定されるべき物理量である．ここで相対速度については，中性粒子に対するイオンの相対速度で定義したが，どちらを基準とするかに本質的な違いはない．では，これらの物理量を用いて単位体

積あたりの摩擦力を表すと，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_{\mathrm{d}} &= [\text{中性粒子の数密度}] \times [\text{単位時間あたりの衝突による運動量輸送}] \\
&= [\text{中性粒子の数密度}] \times [\text{一回の衝突による運動量輸送}] \times [\text{衝突発生率}] \\
&= n_{\mathrm{n}} \frac{m_{\mathrm{n}} m_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{i}}} (\mathbf{u}_{\mathrm{i}} - \mathbf{u}_{\mathrm{n}}) n_{\mathrm{i}} \langle v \sigma_{\mathrm{col}} \rangle = \frac{\langle v \sigma_{\mathrm{col}} \rangle}{m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{i}}} \times \rho_{\mathrm{n}} \rho_{\mathrm{i}} (\mathbf{u}_{\mathrm{i}} - \mathbf{u}_{\mathrm{n}})
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

となる．ここで $\frac{m_{\mathrm{n}} m_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{i}}}$ は中性粒子から見たイオンの換算質量であり，相対速度 $(\mathbf{u}_{\mathrm{i}} - \mathbf{u}_{\mathrm{n}})$ との積で一個の中性粒子に対して輸送される運動量を表している．また，山括弧は統計的な期待値を表している (統計力学的に説明すると，分布関数の積分によって決定される)．したがって，抗力係数 ξ は以下で決定される．

$$
\xi = \frac{\langle v \sigma_{\mathrm{col}} \rangle}{m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{i}}} \tag{4.24}
$$

次に，流体の運動が式 (4.21) で表されるローレンツ力と式 (4.22) で表される摩擦力に支配されていて，この二つの力が釣り合っているという状況を考えよう．このとき相対速度は

$$
\mathbf{u}_{\mathrm{i}} - \mathbf{u}_{\mathrm{n}} = \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{4\pi \xi \rho_{\mathrm{n}} \rho_{\mathrm{i}}} \tag{4.25}
$$

と導かれる．したがって中性粒子の静止系において，単位体積中でイオンの摩擦力によってなされる仕事は

$$
\Gamma = \mathbf{f}_{\mathrm{d}} \cdot (\mathbf{u}_{\mathrm{i}} - \mathbf{u}_{\mathrm{n}}) = \xi \rho_{\mathrm{n}} \rho_{\mathrm{i}} |\mathbf{u}_{\mathrm{i}} - \mathbf{u}_{\mathrm{n}}|^2 = \frac{|(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}|^2}{16\pi^2 \xi \rho_{\mathrm{n}} \rho_{\mathrm{i}}} \tag{4.26}
$$

であり，この仕事は流体の熱エネルギーに変換されると考えることができる．

4.4.2　温度と電離度の進化

本研究では，単純化のために物質は全て水素原子のみを考えた．また，水素原子の電離度を記述するために 3 準位モデルを採用した [103, 105]．この水素 3 準位モデルにおいては，電子の状態は 1s の基底状態と 2s+2p の励起状態，および自由電子の連続状態の 3 種類で記述される．このモデルは計算が簡単な上，宇宙の電離度の進化を精度よく計算することができると報告されている．本研究において，電離度の進化は [121, 119] に従い，以下の式を計算した．

$$
\frac{dx_{\mathrm{i}}}{dt} = \left[-\alpha_e n_{\mathrm{b}} x_{\mathrm{i}}^2 + \beta_e (1 - x_{\mathrm{i}}) \exp\left(\frac{E_{1s} - E_{2s}}{k_{\mathrm{B}} T_\gamma} \right) \right] D + \gamma_e n_{\mathrm{b}} (1 - x_{\mathrm{i}}) x_{\mathrm{i}} \tag{4.27}
$$

ここで E_i はラベル i の状態に対する束縛エネルギーである ($E_i < 0$ とする)．また D は Ly-α の共鳴散乱光子による抑制因子であり，

$$
D = \frac{1 + K\Lambda n_{\mathrm{b}} (1 - x_{\mathrm{i}})}{1 + K\Lambda n_{\mathrm{b}} (1 - x_{\mathrm{i}}) + K\beta_e (1 - x_{\mathrm{i}})}\,, \tag{4.28}
$$

と表される．ここで Ly-α の赤方偏移率を K で, 二光子放射係数を $\Lambda = 8.22458$ [s^{-1}] で表している [119]．ここで式 (4.27) の右辺はそれぞれ順に衝突再結合，光電離，および衝突電離を表している．またこれらの項の係数は以下で与えられる．

$$\alpha_e = 1.14 \times 10^{-13} \times \frac{4.309\ T_4^{-0.6166}}{1 + 0.6703\ T_4^{0.5300}}\ \ [\mathrm{cm}^3\ \mathrm{s}^{-1}]\ , \tag{4.29}$$

$$\beta_e = \alpha_e \left(\frac{2\pi m_\mathrm{e} k_\mathrm{B} T_\gamma}{h_\mathrm{Pl}^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{E_{2s}}{k_\mathrm{B} T_\gamma}\right)\ \ [\mathrm{s}^{-1}]\ , \tag{4.30}$$

$$\gamma_e = 0.291 \times 10^{-7} \times U^{0.39} \frac{\exp(-U)}{0.232 + U}\ \ [\mathrm{cm}^3 \mathrm{s}^{-1}]\ , \tag{4.31}$$

ここで計算コード RECFAST に従って $T_4 = T_\mathrm{gas}/10^4$ [K]，$U = |E_{1s}/k_\mathrm{B} T_\mathrm{gas}|$ と定義した [118]．ただし，元の計算コード RECFAST においては，式 (4.30) は $\beta_e = \alpha_e \left(\frac{2\pi m_\mathrm{e} k_\mathrm{B} T_\mathrm{gas}}{h_\mathrm{Pl}^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{E_{2s}}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{gas}}\right)$ と表されていた．しかし，ガス温度と CMB の温度が大きく異なる場合においてこの表式を計算に用いると光電離率を大きく見積もりすぎる場合があることが先行研究によって報告されている [28]．そのため，ここでは電離度の計算に式 (4.30) を用いた．

一方でガス温度の時間進化は以下の式を用いる．

$$\begin{aligned}\frac{dT_\mathrm{gas}}{dt} =& -2H(t)T_\mathrm{gas} + \frac{\dot{\delta}_\mathrm{b}}{1+\delta_\mathrm{b}} T_\mathrm{gas} + \frac{x_\mathrm{i}}{1+x_\mathrm{i}} \frac{8\rho_\gamma \sigma_\mathrm{T}}{3 m_\mathrm{e} c}(T_\gamma - T_\mathrm{gas}) \\ & - \frac{x_\mathrm{i} n_\mathrm{b}}{1.5 k_\mathrm{B}}[\Theta x_\mathrm{i} + \Psi(1-x_\mathrm{i}) + \eta x_\mathrm{i} + \zeta(1-x_\mathrm{i})] + \frac{\Gamma(t)}{1.5 k_\mathrm{B} n_\mathrm{b}}\end{aligned} \tag{4.32}$$

ここで m_e は電子の静止質量，σ_T はトムソン散乱の断面積, k_B はボルツマン定数, n_b はバリオン数密度である．また下つき添字の γ は CMB の物理量を表している．式 (4.32) の右辺について，第一項は宇宙膨張によるガスの断熱冷却を表している．同様に第二項は，前節で与えた局所的な密度揺らぎによる断熱圧縮による加熱 (あるいは膨張による冷却) であり，第三項は CMB 光子との衝突によるコンプトン冷却 (あるいは加熱) である．角括弧で囲まれた第四項は原子物理学に基づくガスの冷却効果を示す．具体的にはそれぞれ熱的制動放射，衝突励起冷却，再結合冷却および衝突電離冷却の効果である．式 (4.32) において，それぞれの冷却係数は Θ, Ψ, η および ζ で表しており，これらの値は文献 [44] を参照した．以下にその値を示す．

$$\Theta = 1.42 \times 10^{-27} T_\mathrm{gas}^{0.5} \tag{4.33}$$

$$\Psi = 7.5 \times 10^{-19} \left(1 + T_5^{0.5}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1.18}{T_5}\right)\ \ [\mathrm{erg\ cm}^3\ \mathrm{s}^{-1}] \tag{4.34}$$

$$\eta = 6.50 \times 10^{-27} \frac{T_\mathrm{gas}^{0.5}}{T_3(1+T_6)}\ \ [\mathrm{erg\ cm}^3\ \mathrm{s}^{-1}] \tag{4.35}$$

$$\zeta = 1.27 \times 10^{-21} \frac{T_\mathrm{gas}^{0.5}}{1 + T_5^{0.5}} \exp\left(-\frac{1.58}{T_5}\right)\ \ [\mathrm{erg\ cm}^3\ \mathrm{s}^{-1}] \tag{4.36}$$

ただし，$T_3 = T_\mathrm{gas}/10^3$ [K]，$T_5 = T_\mathrm{gas}/10^5$ [K]，$T_6 = T_\mathrm{gas}/10^6$ [K] である．

(4.32) の右辺における最後の項は磁場による IGM の加熱を表している．ここでの加熱機構は前節で述べた双極性散逸であり，その加熱率は以下で表すことにする [121]．

$$\Gamma(t) = \frac{|(\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x})) \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x})|^2}{16\pi^2 \xi \rho_{\mathrm{b}}^2(t)} \frac{(1 - x_{\mathrm{i}})}{x_{\mathrm{i}}} \,, \tag{4.37}$$

ここで抗力係数 ξ には銀河間物質での典型的な値として $\xi = 3.5 \times 10^{13}$ [$\mathrm{cm}^3\ \mathrm{g}^{-1}\ \mathrm{s}^{-1}$] を用いた [125]．実は，ここでの式 (4.37) は前節で導いた式 (4.26) と一致しない．前節では文献 [125] の 27 章に沿って原始磁場の双極性散逸による加熱率を導出した．したがって式 (4.26) は文献 [125] の式 (27.19) と等価なものであるが，これは考えている流体の電離度が非常に小さいという近似の下で導かれる式である．この近似は，ローレンツ力が摩擦力と釣り合っていて中性粒子が動かないとする扱いに対応している．しかしながら，流体の電離度が上昇するとローレンツ力は必ずしも摩擦力と一致せず，ローレンツ力によって生じるイオンの運動に中性粒子が引きずられ始める．このような場合にはもはや式 (4.26) は有効でない．文献 [121] で述べられているとおり，より一般的な加熱率の形式は文献 [30] の式 (27) から導かれ，式 (4.37) で表される．実際に式 (4.26) と式 (4.37) を比較すると，電離度が 1 に近づく極限では式 (4.26) は発散してしまうが，式 (4.37) は 0 となる．ここで中性粒子が存在しない場合は相対速度も摩擦も生じないので，磁場の散逸による加熱も起こらないはずだから後者が正しいのは明らかである．以上より，本研究では原始磁場が双極性散逸を通してバリオンガスに与える加熱率は式 (4.37) で扱うこととした．

また，単純化のために，恒星や活動銀河核などの電離光子源については考慮せず，ヘリウムとそれ以外の重元素を全て無視する近似をした．また式 (4.32) および (4.27) を計算する際に，式 (4.20) で計算した水素原子の数密度 n_{H} と IGM の質量密度 ρ_{b} の揺らぎも考慮している．

第 5 章

研究目的および手法

この章では本研究の目的と手法について説明する．本研究の目的は，現在観測的に制限されていない $B_n \lesssim 1$ nG の原始磁場が，バリオンガスの物理的進化に与える影響を計算し，観測量である熱的 SZ 効果の大きさを見積もることである．ここで，原始磁場のモデルとしては 16 個のモデルを用いて計算を行った．それぞれのモデルは磁場の振幅 B_n とスペクトル指数 n_B で表 5.1 のように与えられる．大きく分けると，我々の研究は 3 つの段階に分けることができる．1 つ目は，計算機上で磁場構造の三次元マップを作ることである．2 つ目は，生成した磁場構造に対して，バリオンガスの密度，温度，電離度の分布の時間進化を計算することである．3 つ目は，バリオンガスが熱的 SZ 効果を通して引き起こす CMB 温度の非等方性のシグナルを見積もることである．ここで，本研究において解析的ではなく数値的な手法を用いた理由は，観測量である熱的 SZ 効果が温度揺らぎと密度揺らぎから作られる非線形な効果であり，オーダー評価の解析的な見積もりよりも数値的な計算の方が高精度に評価できると考えたからである．

はじめに，磁場の三次元構造の生成方法について説明する．ここで，計算する領域は $(1\ \mathrm{Mpc})^3$ とした．この大きさは CMB の最終散乱面において $l \sim 10^4$ のスケールに相当する．また，原始磁場の大きさを数値的に正しく与えるためには，数値計算の格子のサイズを原始磁場のカットオフスケール (4.4) より小さくとる必要がある．前章で述べた通り (4.4) は原始磁場のモデルのパラメータ B_n と n_B に依存するため，数値計算のメッシュ数をモデル 1–3 については 64^3, モデル 4 については 128^3 とした．また，はじめに電磁場のベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ をランダムガウス場として生成し，その回転をとることで磁場の発散を数値誤差の範囲で抑えることを実現している．波数空間において原始磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{k})$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ との関係は

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{k}) \tag{5.1}$$

となる．さらに，波数空間で $i\mathbf{k}$ と生成した原始磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{k})$ の外積をとることで，$\nabla \times \mathbf{B}$ を得ることができる．次に，高速逆フーリエ変換を施すことで，$\mathbf{B}(\mathbf{x})$ と $\nabla \times \mathbf{B}$ の実空間における構造を求める．最後に実空間でこの二つの項の外積をとり，密度揺らぎとガスの温度のソース項 (4.20) および (4.32) を実空間で求めることができる．

次に，バリオンガスの物理量の進化を説明する．本研究において，シミュレーションの各セルの

物理量 (4.20), (4.32) および (4.27) は全て独立に進化するとした．この仮定は物理量の空間的平均値からのズレが線形領域であれば妥当である．また，常微分方程式 (4.32) および (4.27) の数値計算法として 4 次のルンゲ・クッタ法を用いた．数値計算の時間進化の範囲としては赤方偏移で $1000 \leq z \leq 10$ とした．ここで，赤方偏移の範囲の取り方として，原始磁場によってバリオンガスの物理量の揺らぎが有効的に作られるのは光子との結合が切れた晴れ上がり以降であること，および熱的 SZ 効果として線形近似の下でも観測量に効果的に影響を与えるのは宇宙の平均温度が大きい高赤方偏移であること，の二つを考慮した．また，$z = 1000$ から $z = 10$ まで 67 回に分けて，三次元実空間で各点において計算したコンプトンの y パラメータを出力した．このときの間隔はスケールファクター $a = \dfrac{1}{1+z}$ の対数刻みで等間隔である．ここで，式 (4.20) の計算において，水素原子の密度が 0 を下回ることは物理的にありえないため，密度揺らぎの下限値を $\delta_{\rm b} = -0.9$ と設けている．

最後に，得られた y パラメータの物理量の 4 次元データから，各赤方偏移における熱的 SZ 効果の 3 次元パワースペクトル $P_w(\chi(z), k)$ を求める．最終的に，各赤方偏移の間隔を線形補間して $P_w(\chi(z), k)$ を数値積分し，式 (2.28) で与えられる CMB 温度の角度パワースペクトルを求めることができる．

表 5.1　本研究で計算に用いた原始磁場のモデル一覧．左から順に，磁場のモデルのラベル，1 Mpc のスケールで規格化した磁場の強度 B_n，磁場のスペクトル指数 n_B，実空間におけるカットオフスケール λ_c，計算領域全体の一辺の長さ，数値計算における最小分解能の格子の長さを表す．すべての原始磁場のモデルに対して，数値計算ではカットオフスケールより小さいスケールの物理を考慮することが可能であることがわかる．

原始磁場のモデル	B_n [nG]	n_B	λ_c [kpc]	計算領域の一辺 [Mpc]	最小格子長 [kpc]
1	0.5	2.0	318	2.0	31.25
2	0.5	1.0	263	1.0	15.625
3	0.5	0.0	201	1.0	15.625
4	0.5	-1.0	135	1.0	15.625
5	0.1	2.0	200	1.0	15.625
6	0.1	1.0	154	1.0	15.625
7	0.1	0.0	106	1.0	15.625
8	0.1	-1.0	60.3	0.5	7.8125
9	0.05	2.0	165	1.0	15.625
10	0.05	1.0	122	1.0	15.625
11	0.05	0.0	80.1	0.5	7.8125
12	0.05	-1.0	42.6	0.25	3.90625
13	0.01	2.0	104	0.5	7.8125
14	0.01	1.0	71.3	0.5	7.8125
15	0.01	0.0	42.1	0.25	3.90625
16	0.01	-1.0	19.1	0.25	3.90625

第 6 章

結果と考察

6.1　原始磁場がバリオンガスに与える影響

図 6.1 の左列に，式 (4.8) および (4.37) に現れる，磁場のローレンツ力を表す項 $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ の x 成分の二次元構造を示す．また，この図は上から下に向かって表 5.1 におけるモデル 1 から 4 までの場合に対応している．実際にはモデル 5 から 16 個までのすべてについて計算を行ったが，ここでは割愛する．中央と右の列はそれぞれ赤方偏移 $z = 10.0$ の時代における水素原子の電離度と，数密度のマップを表している．いずれのモデルにおいても，磁場のローレンツ力が強い領域では，双極性散逸を通してガスが ~ 20000 K まで加熱されていることが見てわかる．さらに，このような領域においてはローレンツ力の発散が負になっていて，ガスの密度が著しく低下している．この低密度領域においては，光電離が衝突再結合よりも強く影響するために，ガスの電離度が高い状態を保つことが可能となっている．従って，$x_{\rm ion}$ と $n_{\rm H}$ は強い反相関を示すといえる．式 (4.4) に示したカットオフスケールは，表 5.1 に具体的な数値を示しているが，これらのカットオフスケールの大きさは図 6.1 の構造の大きさと対応していることがわかる．いま，最小分解能程度の小スケール ~ 10 kpc では，晴れ上がり直後に非線形な進化 $|\delta_{\rm b}| \gg 1$ をすることが明らかになった．すなわち，線形近似の仮定は小スケールにおいてすぐに破綻する．この点については次節で詳しく触れることにする．

図 6.2 は異なる原始磁場のモデルに対する空間平均したガスの (上) 温度と (下) 電離度の時間進化を示している．ここで，空間平均をとる際にはガスの密度で重み付けを行っている．したがって，図 6.2 は高密度領域での物理量を反映している．ここで，原始磁場によるガスの加熱率 (4.32) は IGM のガスの密度の二乗に反比例しているため，ガスの密度が大きくなると原始磁場による加熱は抑えられて，十分時間が経つと高密度領域で温度の上昇が止まる．実際に，図 6.2 を見ると，晴れ上がり直後はガスの平均温度が上昇するが，$z \sim 300$ で 3000–4000 K ほどに達するとその後は緩やかに下降していることがわかる．$z \gtrsim 300$ の初期宇宙においては密度揺らぎが成長していないため，ほとんどの領域で高い加熱率を保つことができる．しかし $z \lesssim 300$ では密度揺らぎの非線形性が非常に強く，一方で磁場のローレンツ力は宇宙膨張によって低下するため，高密度領域に於ける加熱率は低下してガス温度が低下する．図 6.2 からはガス温度の原始磁場のモデル依存性が小

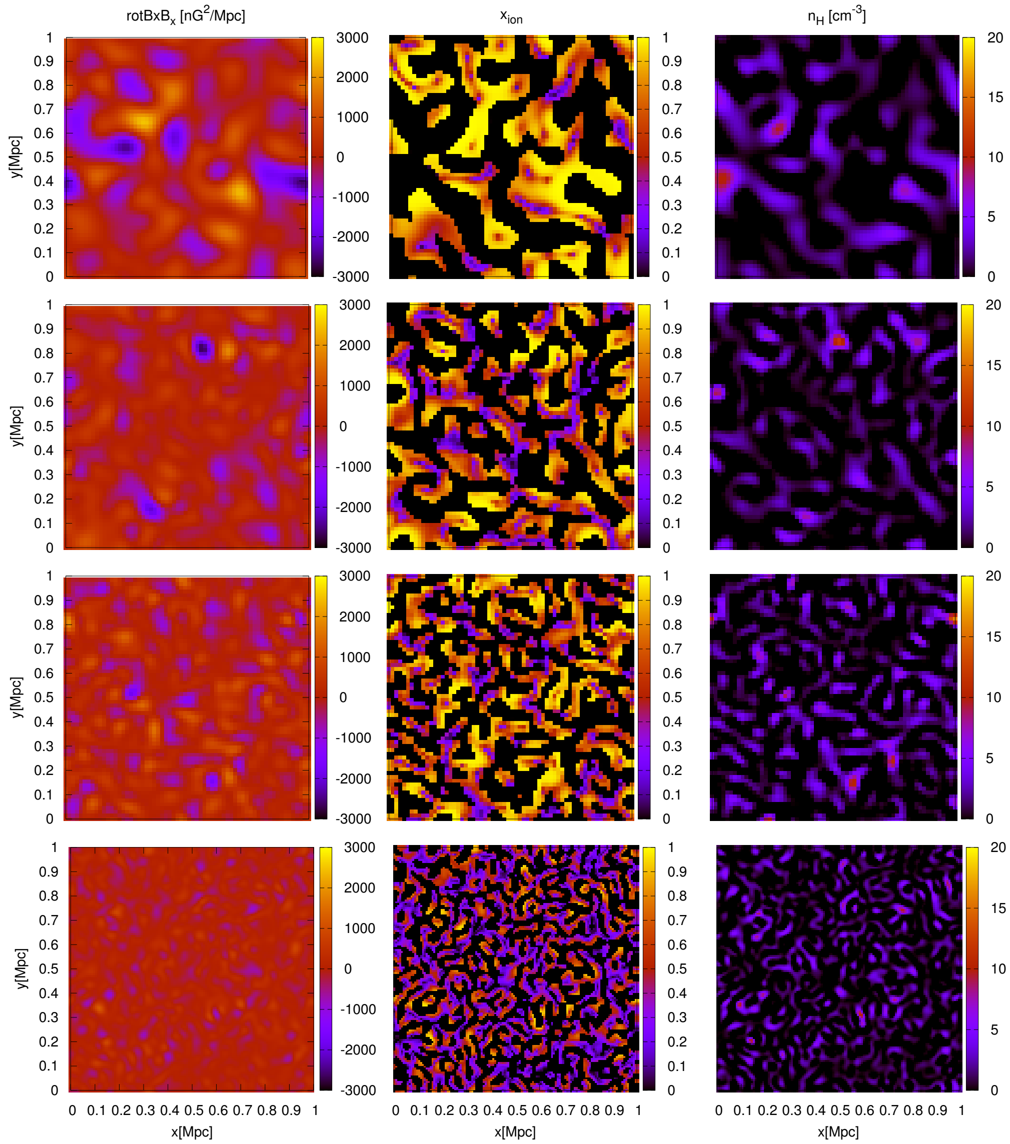

図 6.1　原始磁場のモデル 1–4 について，赤方偏移 $z = 10.0$ における (左) 原始磁場のローレンツ力を表す項 $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_x$, (中央) 水素原子の電離割合，および (右) 水素原子の数密度の二次元構造．上から下の行に向かってそれぞれモデル 1–4 を表している．図から $x_{\rm i}$ と $n_{\rm H}$ に明らかな反相関が現れていることがわかる．B_n と n_B の値が小さい原始磁場のモデルほど，ローレンツ力とガス密度の分布に小さい揺らぎが見えることがわかる．

さいこともまた読み取ることができる．時間進化を経た $z = 10$ の時期でさえ，モデル 1 と 4 に対するガス温度の比はおよそ倍程度である．これは，高赤方偏移において上昇した温度の飽和点は原始磁場のモデルに依存せず，冷却機構や電離度の値で決定されるからである．ガス温度は飽和した後，冷却効果と加熱効果との平衡状態を保ちながら徐々に減少していく．したがって，ガス温度は

単に磁場の強度のみでは決定されないため，温度の磁場依存性は小さい．図には現れていないが，本研究では低密度領域におけるガス温度の進化も解析した．その結果，低密度領域でのガスの温度は，高密度領域における値と同様に晴れ上がり以後すぐに増加することがわかった．ただし，温度が上昇しきった後も，低密度領域のガス温度は同じくらいの高さを保ち続けることがわかった．

図 6.2 の下側は，異なる原始磁場のモデルに対する電離度 $x_{\rm i}$ の質量重み付き平均値を表している．ガスの温度進化とは対照的に，電離度の平均値の進化は単純に高密度領域における値と一致するわけではない．これは典型的な高密度領域と低密度領域の電離度の比が，密度ゆらぎの比よりも大きくなるためである．すなわち，(高密度領域の$\rho x_{\rm i}$) $<$ (低密度領域の$\rho x_{\rm i}$) である．期待した通り，低密度領域における電離度は晴れ上がり以後 $x_{\rm i} \approx 1$ に到達する．このことはガスの密度が小さく，式 (4.27) における衝突再結合の項 $-\alpha_e n_{\rm b} x_{\rm i}^2$ が小さくなるからである．高密度領域では，密度ゆらぎが成長するにつれて衝突再結合割合が大きくなり，電離度は急速に減少する．具体的には，低密度領域 $\delta_{\rm b} = -0.9$ においては $x_{\rm i} \approx 1$ ほどであり，高密度領域 $\delta_b > 10^3$ では電離度が $x_{\rm i} \approx 10^{-7}$ となることがわかった．この，低密度領域と高密度領域における電離度の大きな違いのため，$x_{\rm i}$ の質量重み付きの平均値は高密度領域における電離度 $x_{\rm i}$ を表すわけではないことが説明できる．また図 6.2 における黒い実線は，原始磁場が存在しない場合の一様なガスの電離度の進化を表していて，基本的には低密度領域のほとんど電離したガスのため，磁場が存在する場合は存在しない場合よりも単位密度あたりの電離度が大きい．一方で，高密度領域のほとんど中性のガスの電離度の平均値は原始磁場が存在しない場合よりも小さいことがわかる．これはたとえば，図 6.2 の下図で $100 \lesssim z \lesssim 700$ において，モデル 3 および 4 のふるまいを見ることで理解出来る．まとめると，$x_{\rm i}$ の平均値は (ガス温度とは異なり), 低密度領域と高密度領域でのバランスによって決定される．カットオフスケールにおける磁場の強度についてはモデル 1 が最も大きいため，$x_{\rm i}$ の値についてもモデル 1 が最大であったが，原始磁場のモデルによる大きな依存性は見られなかった．

6.2　原始磁場が誘起する熱的 SZ 効果の予言

図 6.3 から 6.6 に，原始磁場が IGM において熱的 SZ 効果を通して引き起こす CMB 温度の角度パワースペクトルを示す．原始磁場のそれぞれのモデルに対する熱的 SZ 効果の角度パワースペクトル信号は，カットオフスケールに対応する多重極モーメントの値で極大を取っていて，その極大値はカットオフスケールにおける原始磁場の強度 B_{k_c} に依存している．従って，磁場のモデル 1 に対する角度パワースペクトルは全ての磁場のモデルで最も大きい振幅を持っている．ただし，モデル 1 とモデル 2 は原始磁場のカットオフスケールにおける強度が異なるにもかかわらず，熱的 SZ 効果のシグナル強度は同程度となっていることがわかる．これは，モデル 2 とそれよりも強い原始磁場のモデルでは，ローレンツ力があまりにも強いためにガス温度の上昇や密度揺らぎの成長が頭打ちになり，熱的 SZ 効果を生じさせる物理量の値が変化しなくなるためである．(ガス温度の上昇が抑制されるのは，ガス温度が 10000 K ほどになると原子物理学的な衝突による冷却効果が効果的になるからである．また，低密度領域では密度揺らぎが下限値 $\delta_b = -0.9$ に到達するため，結果として，ある強度を超えた原始磁場のモデルに対しては熱的 SZ 効果のシグナルが頭打ち

となる．) ただし，これらの原始磁場のモデルについても，カットオフスケールは異なるため，熱的 SZ 効果の信号の極大をとるスケールを見ることにより区別できる可能性はある．また，この角度パワースペクトルの振幅を定式化された原始磁場のパラメータを用いて解析的に表すことは困難である．これは，熱的 SZ 効果と結びついているガスの物理量は非線形な成長をすることと，多くの領域で頭打ちになっているためである．また，図 6.3–6.6 から，熱的 SZ 効果の角度パワースペクトルはカットオフスケールより大きいスケールにおいて l に比例して減衰していくことが見てとれる．ここで特筆すべきは，熱的 SZ 効果のパワースペクトルの傾きは原始磁場のスペクトル指数 n_B に依存しないということである．このことは，カットオフスケールの原始磁場のみが熱的 SZ 効果に影響を与え，大スケールでの磁場の強度は SZ 効果の揺らぎに影響しないことによって説明できる．また，図 6.3–6.6 を見てわかる通り，熱的 SZ 効果の信号の傾きが原始磁場のスペクトル指数に依存しないことは，$-1.0 \leq n_B \leq 2.0$ の範囲で確かめることができた．ただし，式 (4.4) によって定義されるカットオフスケールは，B_n と n_B の両方のパラメータによって決定されるため，熱的 SZ 効果の角度パワースペクトルの振幅は n_B にも依存する．まとめると，原始磁場に起因する熱的 SZ 効果は原始磁場のカットオフスケールについての情報を持っていることは確かだが，実際に観測して得られたデータと理論的な予言を比較する場合には注意が必要である．これはカットオフスケールは典型的な磁場の強度 B_n とスペクトル指数 n_B の両方によって決定されるため，これらのパラメータが縮退する可能性を考慮するべきである．

最後に，本研究の結果について重要な点を一つ考察しておこう．本研究で密度分布の時間進化を求める際に用いた式 (4.6) および (4.20) について，これらを導出する際には二つの大きな仮定として (i) 流体の熱的な圧力を無視することができて (ii) 背景の一様密度からの局所的な揺らぎは線形領域であること，すなわち，背景の一様密度よりも十分小さいこと $\Leftrightarrow \delta_i \ll 1$ (ここで下つき添字の i は c, b のいずれかを表す) を要請している．仮定 (i) については，本研究においては数値計算上の最小分解スケールがジーンズスケールよりも大きく，条件を満足していることがわかった．しかし一方で，仮定 (ii) については，本研究におけるすべての原始磁場のモデルについて，晴れ上がり直後からほとんどの高密度領域で $\delta \gg 1$ となり，線形近似が破綻していることがわかった．ただし，我々の研究結果から，こうした高密度領域のバリオンガスは衝突再結合割合が非常に高く，水素原子の中性割合が非常に高く保たれることと，原始磁場の双極性散逸による単位質量あたりのガスの加熱率が非常に低く，ガス温度もまた低く抑えられるために，熱的 SZ 効果の信号強度には大きな影響を与えないことが明らかになった．そのため，高密度領域における密度揺らぎの見積もりは正確とは言えないが，低密度領域では密度揺らぎは準線形領域 $|\delta| \lesssim 1$ にとどまるため，本研究における CMB 温度の非等方性の見積もりを損なうことはないと考えられる．ここで低密度領域においては IGM のバリオンガスの密度が負になることを防ぐために，IGM の密度の下限値を $\delta_{\mathrm{b}} = -0.9$ とおいている．観測されているボイドは，密度ゆらぎが $\delta_{\mathrm{b}} < -0.85$ ほどの低密度領域であるため，この下限値によって非線形性を人工的に考慮していることになっている (ここで，ボイドの密度ゆらぎの値は文献 [99] などで示されている)．このように，人工的に下限値を設定しているが上限値は設定していないため，計算領域の全体での質量保存は破れている．だが，このことによってたとえ高密度領域の密度ゆらぎの値を大きく見積もりすぎていたとしても，このことは低

密度領域における y パラメータの値に対して大きな影響はないと考えられる．そのため，低密度領域のガスによってつくられる熱的 SZ 効果の角度パワースペクトルは高密度領域における非線形性によって大きな影響を受けないはずである．この点を確かめるためには，物質の密度や温度進化の非線形性を考慮して SZ 効果による CMB 温度の角度パワースペクトルを計算しなければならない．今後の研究ではこうした非線形な効果を取り入れた宇宙論的な磁気流体力学に基づく大規模数値計算を行い，より現実的な SZ 効果の見積もりを行う予定である．

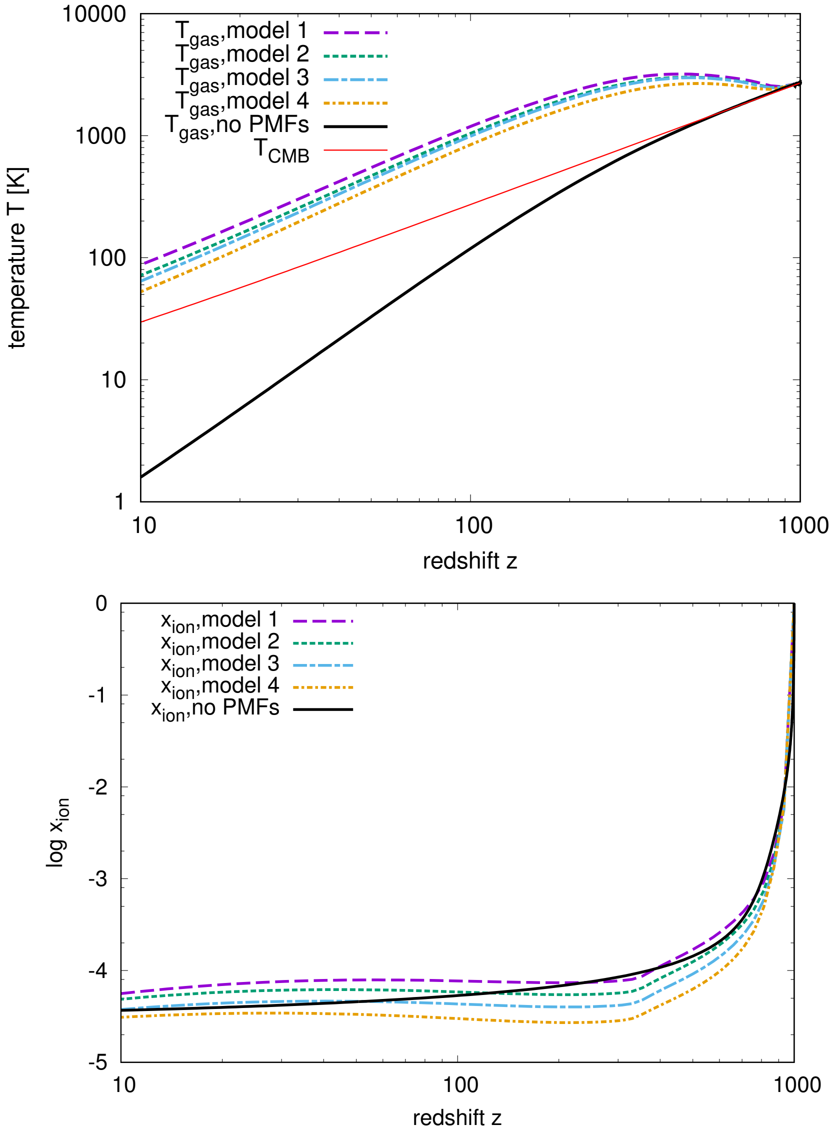

図 6.2　原始磁場が存在する場合としない場合について，宇宙全体で平均した (上) ガスの温度と (下) 電離度の時間進化を表した．これらの物理量は単位質量あたりの平均を取っており，色つきの点線はそれぞれ異なる原始磁場のモデルを表している．黒実線は原始磁場が存在しない場合の時間進化を示していて，上図の温度進化における赤線は CMB 温度の時間進化を表している．原始磁場が存在する場合は，原始磁場が存在しない場合に比べて双極性散逸による加熱のためにガス温度が常に大きくなる．その一方で，高赤方偏移では原始磁場が存在しない場合よりも存在する場合の方が電離度が小さく，これは，高密度領域では密度ゆらぎが大きく，衝突再結合率も高いためである．しかしながら，$z \sim 300$ 以降では低密度領域で電離度が $x_{\rm i} \sim 1$ に達し，電離度の空間平均値もまた増加し始める．

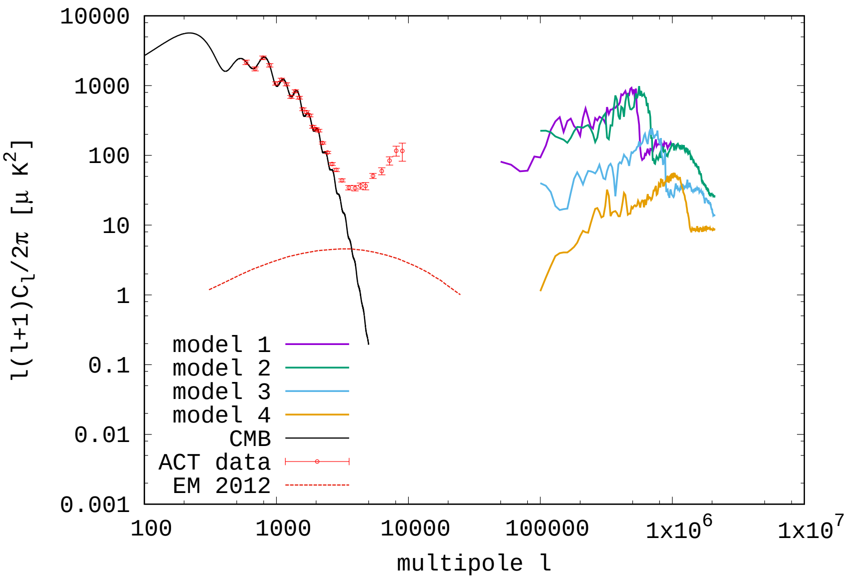

図 6.3　式 (2.28) を $z = 1000$ から $z = 10$ まで積分することで得られた，熱的 SZ 効果の角度パワースペクトル．model 1 から 4 はそれぞれ表 5.1 の原始磁場のモデルに対する結果を意味する．また，比較のため，原始磁場の存在を考えない場合の理論予言を黒実線で，アタカマ宇宙論望遠鏡 (ACT, Atacama Cosmology Telescope) の観測データ [67] を誤差棒付きの赤点で示している．明らかに，原始磁場のモデルを制限するためには現在の観測データは角度分解能が低いことが見て取れる．

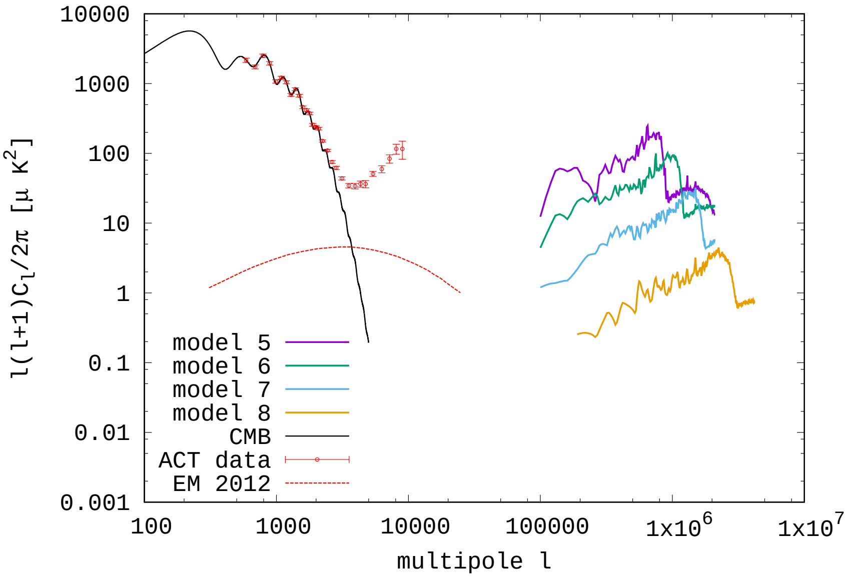

図 6.4　表 5.1 の原始磁場のモデル 5 から 8 に対する熱的 SZ 効果の角度パワースペクトル．その他の説明は本文および図 6.3 のキャプションを参照されたい．

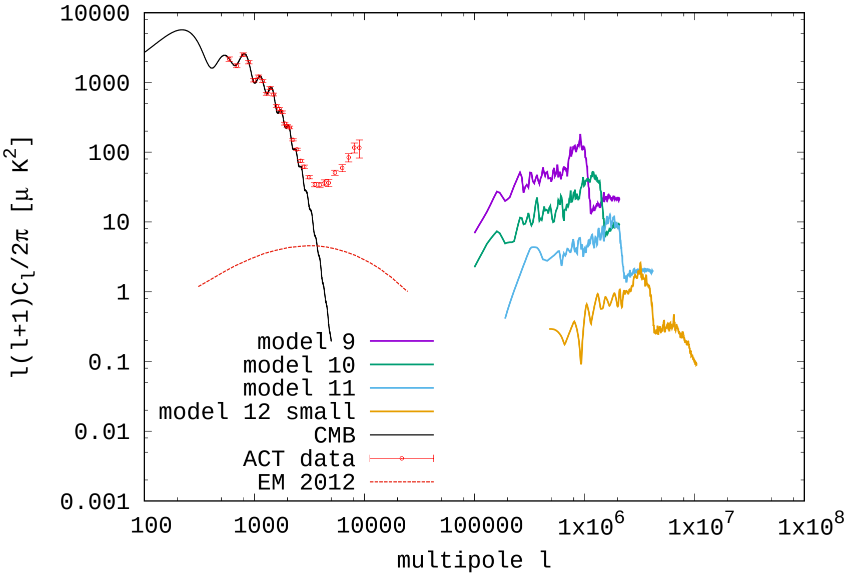

図 6.5　表 5.1 の原始磁場のモデル 9 から 12 に対する熱的 SZ 効果の角度パワースペクトル．その他の説明は本文および図 6.3 のキャプションを参照されたい．

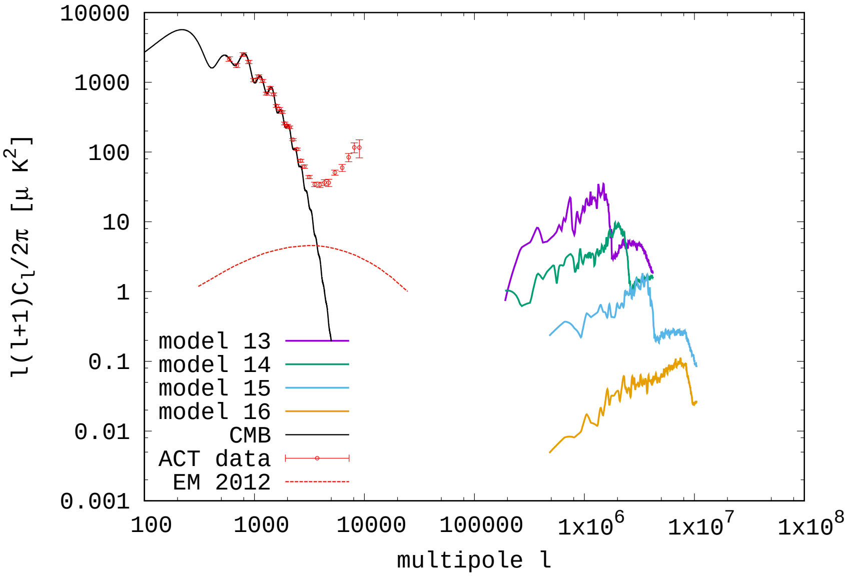

図 6.6　表 5.1 の原始磁場のモデル 13 から 16 に対する熱的 SZ 効果の角度パワースペクトル．その他の説明は本文および図 6.3 のキャプションを参照されたい．

第 7 章

まとめ

本研究では，原始磁場が銀河間領域において熱的 SZ 効果を通して生成する CMB 温度揺らぎについて計算をおこなった．この際，原始磁場がバリオンガスに与える影響として，二つの効果を矛盾なく考慮した．この二つの効果とはすなわち，ローレンツ力によるバリオンガスの密度進化への影響および双極性散逸によるバリオンガスの温度進化への影響である．本研究では原始磁場を確率的に決定されるガウス分布として考慮し，原始磁場の空間的な非一様性が上記の効果を通して生成するガスの密度，温度，電離度のゆらぎを計算した．また，これらのゆらぎによって銀河間領域においてコンプトンの y パラメータに非等方性が作られることを定量的に示した．また，計算した熱的 SZ 効果の角度パワースペクトルについて，原始磁場の統計的性質 (原始磁場の 1 Mpc での強度とスペクトル指数) との関係性も考察した．この熱的 SZ 効果を評価するために，ランダムガウス場として原始磁場を与えてバリオンガスの物理量の時間進化を数値的に計算した．本研究は，原始磁場の存在を考慮してバリオンガスの密度，温度，電離度の空間的な分布を調べた点で独創的である．

異なる原始磁場のモデルに対して数値計算を実行したことによって，原始磁場のカットオフスケールが空間分布の特徴的なスケールとして見られることがわかった．興味深いことに，バリオンガスの密度と，温度 (あるいは電離度) との間に強い反相関関係があらわれることがわかった．これは構造形成の標準的な理論から期待される結果とは対照的で，原始磁場の良いプローブになる可能性が示唆される．高密度領域においては，原始磁場の単位質量あたりの加熱率が小さいためバリオンガスの温度の上昇が穏やかになる．また衝突再結合が頻繁に起こるようになるため電離度は小さくなる．一方で，低密度領域においては，衝突再結合率が小さいために晴れ上がり以後でも電離度が小さいままであることがわかった．最後に，原始磁場によって生じる熱的 SZ 効果の角度パワースペクトルはガスの密度が小さい銀河間領域からの寄与が大きいことがわかった．言い換えると，高密度領域のバリオンガスはほとんど中性であるため，熱的 SZ 効果に対する寄与は非常に小さいことがわかった．また熱的 SZ 効果の角度パワースペクトルは，原始磁場のカットオフスケールに対応した角度スケール (たとえば $B_n \sim 0.1$ nG の原始磁場に対しては $l \sim 10^6$) に鋭いピークを持っていて，パワースペクトルの振幅はカットオフスケールでの磁場の強度で決まることがわかった．このような小スケールにおける CMB の温度揺らぎは，銀河団中の自由電子ガスに由来す

る熱的 SZ 効果や，アウトサイド-インと呼ばれる宇宙の再電離モデルによって生じる運動学的 SZ 効果なども主な要因として考えられる．ところがこれらの効果は $l \lesssim 10^4$ ほどで極大値を持ち，それより大きな l では単調に減衰していくと考えられている．対照的に，nG 以下の強度を持つ原始磁場によって生じる熱的 SZ 効果は $l \sim 10^6$ 程度まで増加するが，この効果の観測可能性について詳細な見積もりは今後の課題とする．

本研究では，バリオンガスの密度進化の計算に密度ゆらぎの線形理論に基づく方程式を用いた．原始磁場によって生じる密度揺らぎが小スケールで大きい (すなわち「青い」スペクトルを持つ) ことは先行研究によって調べられてきた．したがって，このシミュレーションにおいては，小スケールでは多くの点で密度揺らぎの値が 1 よりも大きくなるため，そのような領域では線形化した方程式を当てはめることは正しくない．しかしながら，繰り返し述べるように，そのような高密度領域では電離度が非常に小さいため，コンプトンの y パラメータへの寄与もまた非常に小さいと考えられる．すなわち，本研究においては密度ゆらぎの線形性が破れているものの，それによって熱的 SZ 効果の角度パワースペクトルが大きく見積もられすぎるというわけではない．低密度領域においてはガスの密度の値が負になることを防ぐために，密度ゆらぎの値に下限値 $\delta_{\rm b} > -0.9$ を与えている．この条件を課すことで，低密度領域においては構造形成の非線形効果 (ここではボイド領域を指す) を近似的に考慮している．この数値計算においては，密度ゆらぎの時間進化は線形理論に基づいており，各点におけるローレンツ力の大きさによってのみ決定される．しかしながら，ボイドの形成は周囲の状況にも依存するべきである．したがって，熱的 SZ 効果の角度パワースペクトルを適切に見積もるためには構造形成の非線形効果を十分に考慮するべきである．加えて，本研究では原始磁場の時間進化としては宇宙膨張による断熱変化のみを考慮している．しかし，低密度領域においても原始磁場はバリオンガスに凍結していて，密度進化は原始磁場の進化に影響を与えるはずであると考えられる．この原始磁場の成長を考慮すると，特に高密度領域でバリオンガスの温度進化に影響を与え，熱的 SZ 角度のパワースペクトルの振幅を強める可能性がある．しかしこのような非線形な効果を適切に扱うためには，原始磁場を考慮して，宇宙論的な磁気流体力学に基づく大規模なシミュレーションを行う必要がある．また，このような大規模数値計算を行うことで，重力不安定性における密度ゆらぎの崩壊の条件に原始磁場が与える影響 [124] や銀河団内の高温ガスに起因する熱的 SZ 効果の非等方性に原始磁場が与える影響 [138, 123] の見積りも可能になるはずである．

本研究によって，原始磁場は晴れ上がり以降では小スケールで熱的 SZ 効果を作り出すことを示すことができた．最後に，小スケールにおける CMB の観測に対して，この原始磁場に起因するシグナルの観測可能性について述べておこう．現在の観測データからは，原始磁場が熱的 SZ 効果を作るような小スケールでは前景放射が大きな寄与を果たすことがわかっている．さらに，この前景放射を完全に除去することは困難な課題である．原始磁場が存在すると，本研究において調べた熱的 SZ 効果に加えて，晴れ上がり以前にも磁場が生成する速度ゆらぎによってドップラー効果が生じ，結果として小スケールで CMB の非等方性が生じると考えられる [133, 56]．原始磁場の制限を行うためには，これらの寄与をすべて考慮して CMB の非等方性を精密に見積もる必要がある．しかしながら，この点は本研究の範囲を超えているため，今後の課題とする．

謝辞

本研究を行うにあたって，まず共同研究者かつ指導教員である杉山直教授に心より感謝します．杉山教授には大学院への入学時から現在に至るまで，理学研究科長というお忙しい立場であるにもかかわらず熱心にご指導・ご鞭撻をしていただきました．特に，論文の投稿や研究の大きな方針については杉山教授に頂いたアドバイスがとても参考になり，博士前期課程在学中の論文出版の実現につながったのだと確信しています．次に，同じく共同研究者である市來淨與准教授には数値計算における磁場の空間分布の計算方法やリンバー近似を用いた角度パワースペクトルの見積もりなどについて重要な議論をしていただきました．また，田代寛之特任講師には本研究のテーマ決めから論文の執筆まで非常に多くの助言をいただき，長谷川賢二特任助教には本研究と原子物理学との関連などについて議論をしていただきました．共同研究者以外の方として，筑波大学の吉川耕司さんには研究会において議論をしていただき，ガスの密度と温度の共進化について大変ありがたい助言をいただきました．また，電子メールでアドバイスをくださった方として，電離度の計算に関してマンチェスター大学の Jens Chluba 氏に，銀河間磁場の観測に関する研究としてカリフォルニア大学ロサンゼルス校の Alexander Kusenko 氏に強く感謝申し上げます．また，私が所属している名古屋大学宇宙論研究室の皆様に感謝いたします．特に嵯峨承平さんには密度ゆらぎの時間進化の計算について有益なコメントをしてくださり，小林将人さんには研究に対して大変有意義な議論をして頂き，堀口晃一郎さんには基礎物理の知識についてご教授いただきました．それ以外でも自主ゼミなどでお世話に成った研究室のメンバーにもあつく御礼申し上げます．最後に，博士前期課程の学生生活において最も時間を共有した同期の飯田遼くん，角田匠くん，竹内太一くん，田中俊行くん，簑口睦美さんに感謝を述べて筆を置きたいと思います．

参考文献

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. 1972.

[2] F. A. Aharonian, P. S. Coppi, and H. J. Voelk. Very high energy gamma rays from active galactic nuclei: Cascading on the cosmic background radiation fields and the formation of pair halos. ApJ, Vol. 423, pp. L5–L8, March 1994.

[3] T. Akahori, H. Nakanishi, Y. Sofue, Y. Fujita, K. Ichiki, S. Ideguchi, O. Kameya, T. Kudoh, Y. Kudoh, M. Machida, Y. Miyashita, H. Ohno, T. Ozawa, K. Takahashi, M. Takizawa, and D. G. Yamazaki. Cosmic magnetism in centimeter- and meter-wavelength radio astronomy. PASJ, December 2017.

[4] R. A. Alpher, H. Bethe, and G. Gamow. The Origin of Chemical Elements. *Physical Review*, Vol. 73, pp. 803–804, April 1948.

[5] R. A. Alpher and R. C. Herman. Neutron-Capture Theory of Element Formation in an Expanding Universe. *Physical Review*, Vol. 84, pp. 60–68, October 1951.

[6] M. Ando, K. Doi, and H. Susa. Generation of Seed Magnetic Field Around First Stars: Effects of Radiation Force. ApJ, Vol. 716, pp. 1566–1572, June 2010.

[7] S. Ando and A. Kusenko. Evidence for Gamma-ray Halos Around Active Galactic Nuclei and the First Measurement of Intergalactic Magnetic Fields. ApJ, Vol. 722, pp. L39–L44, October 2010.

[8] Kumar Atmjeet, Isha Pahwa, T. R. Seshadri, and Kandaswamy Subramanian. Cosmological magnetogenesis from extra-dimensional gauss-bonnet gravity. *Phys. Rev. D*, Vol. 89, p. 063002, Mar 2014.

[9] R. Beck. Galactic and Extragalactic Magnetic Fields. In F. A. Aharonian, W. Hofmann, and F. Rieger, editors, *American Institute of Physics Conference Series*, Vol. 1085 of *American Institute of Physics Conference Series*, pp. 83–96, December 2008.

[10] R. Beck. Cosmic Magnetic Fields: Observations and Prospects. In F. A. Aharonian, W. Hofmann, and F. M. Rieger, editors, *American Institute of Physics Conference Series*, Vol. 1381 of *American Institute of Physics Conference Series*, pp. 117–136, September 2011.

[11] R. Beck. Magnetic fields in spiral galaxies. A&A Rev., Vol. 24, p. 4, December 2015.

[12] R. Beck and B. M. Gaensler. Observations of magnetic fields in the Milky Way and in nearby galaxies with a Square Kilometre Array. New A Rev., Vol. 48, pp. 1289–1304, December 2004.

[13] R. Beck and R. Wielebinski. *Magnetic Fields in Galaxies*, p. 641. 2013.

[14] P. S. Behroozi, R. H. Wechsler, and C. Conroy. The Average Star Formation Histories of Galaxies in Dark Matter Halos from z = 0-8. ApJ, Vol. 770, p. 57, June 2013.

[15] M. Bernardi, A. Meert, R. K. Sheth, V. Vikram, M. Huertas-Company, S. Mei, and F. Shankar. The massive end of the luminosity and stellar mass functions: dependence on the fit to the light profile. MNRAS, Vol. 436, pp. 697–704, November 2013.

[16] L. Biermann. Über den Ursprung der Magnetfelder auf Sternen und im interstellaren Raum (miteinem Anhang von A. Schlüter). *Zeitschrift Naturforschung Teil A*, Vol. 5, p. 65, 1950.

[17] A. Bonafede, L. Feretti, M. Murgia, F. Govoni, G. Giovannini, and V. Vacca. Galaxy cluster magnetic fields from radio polarized emission. *ArXiv e-prints*, September 2010.

[18] C. Bonvin. Impact of a causal primordial magnetic field on the Sachs Wolfe Effect. *ArXiv e-prints*, May 2010.

[19] C. Bonvin and C. Caprini. CMB temperature anisotropy at large scales induced by a causal primordial magnetic field. J. Cosmology Astropart. Phys., Vol. 5, p. 022, May 2010.

[20] Camille Bonvin, Chiara Caprini, and Ruth Durrer. Magnetic fields from inflation: The cmb temperature anisotropies. *Phys. Rev. D*, Vol. 88, p. 083515, Oct 2013.

[21] A. Brandenburg and K. Subramanian. Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory. Phys. Rep., Vol. 417, pp. 1–209, October 2005.

[22] J. C. Brown. The Magnetic Field of the Milky Way Galaxy. In R. Kothes, T. L. Landecker, and A. G. Willis, editors, *The Dynamic Interstellar Medium: A Celebration of the Canadian Galactic Plane Survey*, Vol. 438 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, p. 216, December 2010.

[23] C. Caprini. Primordial magnetic fields and gravitational waves. *Astronomische Nachrichten*, Vol. 327, p. 422, June 2006.

[24] C. Caprini and R. Durrer. Gravitational wave production: A strong constraint on primordial magnetic fields. Phys. Rev. D, Vol. 65, No. 2, p. 023517, January 2002.

[25] C. L. Carilli and G. B. Taylor. Cluster Magnetic Fields. ARA&A, Vol. 40, pp. 319–348, 2002.

[26] J. E. Carlstrom, G. P. Holder, and E. D. Reese. Cosmology with the Sunyaev-Zel'dovich Effect. ARA&A, Vol. 40, pp. 643–680, 2002.

[27] W. Chen, J. H. Buckley, and F. Ferrer. Search for GeV γ -Ray Pair Halos Around Low Redshift Blazars. *Physical Review Letters*, Vol. 115, No. 21, p. 211103, November 2015.

[28] J. Chluba, D. Paoletti, F. Finelli, and J. A. Rubiño-Martín. Effect of primordial magnetic fields on the ionization history. MNRAS, Vol. 451, pp. 2244–2250, August 2015.

[29] T. E. Clarke, P. P. Kronberg, and H. Böhringer. A New Radio-X-Ray Probe of Galaxy Cluster Magnetic Fields. ApJ, Vol. 547, pp. L111–L114, February 2001.

[30] T. G. Cowling. The dissipation of magnetic energy in an ionized gas. MNRAS, Vol. 116, p. 114, 1956.

[31] R. A. Daly and A. Loeb. A possible origin of galactic magnetic fields. ApJ, Vol. 364, pp. 451–455, December 1990.

[32] A.-C. Davis, M. Lilley, and O. Törnkvist. Relaxing the bounds on primordial magnetic seed fields. Phys. Rev. D, Vol. 60, No. 2, p. 021301, July 1999.

[33] M. Davis and P. J. E. Peebles. On the integration of the BBGKY equations for the development of strongly nonlinear clustering in an expanding universe. ApJS, Vol. 34, pp. 425–450, August 1977.

[34] H. Dingle. On isotropic models of the universe, with special reference to the stability of the homogeneous and static states. MNRAS, Vol. 94, pp. 134–158, December 1933.

[35] A. D. Dolgov. Breaking of conformal invariance and electromagnetic field generation in the universe. *Phys. Rev. D*, Vol. 48, pp. 2499–2501, Sep 1993.

[36] R. Durrer, P. G. Ferreira, and T. Kahniashvili. Tensor microwave anisotropies from a stochastic magnetic field. Phys. Rev. D, Vol. 61, No. 4, p. 043001, February 2000.

[37] R. Durrer and A. Neronov. Cosmological magnetic fields: their generation, evolution and observation. A&A Rev., Vol. 21, p. 62, June 2013.

[38] J.-B. Durrive and M. Langer. Intergalactic magnetogenesis at Cosmic Dawn by photoionization. MNRAS, Vol. 453, pp. 345–356, October 2015.

[39] A. Einstein. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 142-152.*, 1917.

[40] W. Essey, S. Ando, and A. Kusenko. Determination of intergalactic magnetic fields from gamma ray data. *Astroparticle Physics*, Vol. 35, pp. 135–139, October 2011.

[41] F. Finelli, F. Paci, and D. Paoletti. Impact of stochastic primordial magnetic fields on the scalar contribution to cosmic microwave background anisotropies. Phys. Rev. D, Vol. 78, No. 2, p. 023510, July 2008.

[42] A. Friedmann. Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift fur Physik*, Vol. 10, pp. 377–386, 1922.

[43] T. Fujita, R. Namba, Y. Tada, N. Takeda, and H. Tashiro. Consistent generation of magnetic fields in axion inflation models. J. Cosmology Astropart. Phys., Vol. 5, p. 054, May 2015.

[44] M. Fukugita and M. Kawasaki. Reionization during Hierarchical Clustering in a Universe

Dominated by Cold Dark Matter. MNRAS, Vol. 269, p. 563, August 1994.

[45] S. R. Furlanetto and A. Loeb. Intergalactic Magnetic Fields from Quasar Outflows. ApJ, Vol. 556, pp. 619–634, August 2001.

[46] S. R. Furlanetto and A. Loeb. Intergalactic Magnetic Fields from Quasar Outflows. In M. Gilfanov, R. Sunyeav, and E. Churazov, editors, *Lighthouses of the Universe: The Most Luminous Celestial Objects and Their Use for Cosmology*, p. 450, 2002.

[47] M. Gasperini, M. Giovannini, and G. Veneziano. Primordial magnetic fields from string cosmology. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 75, pp. 3796–3799, Nov 1995.

[48] V. L. Ginzburg and S. I. Syrovatskii. Cosmic Magnetobremsstrahlung (synchrotron Radiation). ARA&A, Vol. 3, p. 297, 1965.

[49] V. L. Ginzburg and S. I. Syrovatskii. Developments in the Theory of Synchrotron Radiation and its Reabsorption. ARA&A, Vol. 7, p. 375, 1969.

[50] M. Giovannini. Magnetized initial conditions for CMB anisotropies. Phys. Rev. D, Vol. 70, No. 12, p. 123507, December 2004.

[51] M. Giovannini. Growth rate of matter perturbations as a probe of large-scale magnetism. Phys. Rev. D, Vol. 84, No. 6, p. 063010, September 2011.

[52] M. Giovannini and K. E. Kunze. Generalized CMB initial conditions with pre-equality magnetic fields. Phys. Rev. D, Vol. 77, No. 12, p. 123001, June 2008.

[53] M. Giovannini and K. E. Kunze. Magnetized CMB observables: A dedicated numerical approach. Phys. Rev. D, Vol. 77, No. 6, p. 063003, March 2008.

[54] M. Giovannini and K. E. Kunze. Magnetized completion of the ΛCDM paradigm. Phys. Rev. D, Vol. 77, No. 6, p. 061301, March 2008.

[55] Massimo Giovannini. Magnetogenesis and the dynamics of internal dimensions. *Phys. Rev. D*, Vol. 62, p. 123505, Nov 2000.

[56] Massimo Giovannini. Tight coupling expansion and fully inhomogeneous magnetic fields. *Phys. Rev. D*, Vol. 74, p. 063002, Sep 2006.

[57] Massimo Giovannini. Growth rate of matter perturbations as a probe of large-scale magnetism. *Phys. Rev. D*, Vol. 84, p. 063010, Sep 2011.

[58] N. Y. Gnedin, A. Ferrara, and E. G. Zweibel. Generation of the Primordial Magnetic Fields during Cosmological Reionization. ApJ, Vol. 539, pp. 505–516, August 2000.

[59] D. S. Gorbunov and V. A. Rubakov. *Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory.* World Scientific Publishing Co, 2011.

[60] F. Govoni and L. Feretti. Magnetic Fields in Clusters of Galaxies. *International Journal of Modern Physics D*, Vol. 13, pp. 1549–1594, 2004.

[61] D. Grasso and A. Riotto. On the nature of the magnetic fields generated during the electroweak phase transition. *Physics Letters B*, Vol. 418, pp. 258–265, February 1998.

[62] M. Guyot and Y. B. Zeldovic. Gravitational Instability of a Two-Component Fluid. A&A, Vol. 9, p. 227, December 1970.

[63] J. Hamann, J. Lesgourgues, and G. Mangano. Using big bang nucleosynthesis in cosmological parameter extraction from the cosmic microwave background: a forecast for PLANCK. J. Cosmology Astropart. Phys., Vol. 3, p. 004, March 2008.

[64] J. Han. Magnetic fields in our Milky Way Galaxy and nearby galaxies. In A. G. Kosovichev, E. de Gouveia Dal Pino, and Y. Yan, editors, *Solar and Astrophysical Dynamos and Magnetic Activity*, Vol. 294 of *IAU Symposium*, pp. 213–224, July 2013.

[65] J. L. Han. Observing Interstellar and Intergalactic Magnetic Fields. ARA&A, Vol. 55, pp. 111–157, August 2017.

[66] H. Hanayama, K. Takahashi, K. Kotake, M. Oguri, K. Ichiki, and H. Ohno. Biermann Mechanism in Primordial Supernova Remnant and Seed Magnetic Fields. ApJ, Vol. 633, pp. 941–945, November 2005.

[67] M. Hasselfield, M. Hilton, T. A. Marriage, G. E. Addison, L. F. Barrientos, N. Battaglia, E. S. Battistelli, J. R. Bond, D. Crichton, S. Das, M. J. Devlin, S. R. Dicker, J. Dunkley, R. Dünner, J. W. Fowler, M. B. Gralla, A. Hajian, M. Halpern, A. D. Hincks, R. Hlozek, J. P. Hughes, L. Infante, K. D. Irwin, A. Kosowsky, D. Marsden, F. Menanteau, K. Moodley, M. D. Niemack, M. R. Nolta, L. A. Page, B. Partridge, E. D. Reese, B. L. Schmitt, N. Sehgal, B. D. Sherwin, J. Sievers, C. Sifón, D. N. Spergel, S. T. Staggs, D. S. Swetz, E. R. Switzer, R. Thornton, H. Trac, and E. J. Wollack. The Atacama Cosmology Telescope: Sunyaev-Zel'dovich selected galaxy clusters at 148 GHz from three seasons of data. J. Cosmology Astropart. Phys., Vol. 7, p. 008, July 2013.

[68] M. Haverkorn. Magnetic Fields in the Milky Way. In A. Lazarian, E. M. de Gouveia Dal Pino, and C. Melioli, editors, *Magnetic Fields in Diffuse Media*, Vol. 407 of *Astrophysics and Space Science Library*, p. 483, 2015.

[69] C. Hayashi. Proton-Neutron Concentration Ratio in the Expanding Universe at the Stages preceding the Formation of the Elements. *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 5, pp. 224–235, March 1950.

[70] Craig J. Hogan. Magnetohydrodynamic effects of a first-order cosmological phase transition. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 51, pp. 1488–1491, Oct 1983.

[71] E. Hubble. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, Vol. 15, pp. 168–173, March 1929.

[72] Kazuhide Ichikawa and Tomo Takahashi. Reexamining the constraint on the helium abundance from the cmb. *Phys. Rev. D*, Vol. 73, p. 063528, Mar 2006.

[73] K. Ichiki, K. Takahashi, H. Ohno, H. Hanayama, and N. Sugiyama. Cosmological Magnetic Field: A Fossil of Density Perturbations in the Early Universe. *Science*, Vol. 311,

pp. 827–829, February 2006.

[74] C. Isola and G. Sigl. Large scale magnetic fields and the number of cosmic ray sources above the Greisen-Zatsepin-Kuzmin cutoff. Phys. Rev. D, Vol. 66, No. 8, p. 083002, October 2002.

[75] Rajeev Kumar Jain and Martin S. Sloth. Consistency relation for cosmic magnetic fields. *Phys. Rev. D*, Vol. 86, p. 123528, Dec 2012.

[76] K. Jedamzik, V. Katalinić, and A. V. Olinto. Damping of cosmic magnetic fields. Phys. Rev. D, Vol. 57, pp. 3264–3284, March 1998.

[77] T. Kahniashvili, A. Kosowsky, A. Mack, and R. Durrer. CMB signatures of a primordial magnetic field. In R. Durrer, J. Garcia-Bellido, and M. Shaposhnikov, editors, *Cosmology and Particle Physics*, Vol. 555 of *American Institute of Physics Conference Series*, pp. 451–456, February 2001.

[78] T. Kahniashvili and B. Ratra. CMB anisotropies due to cosmological magnetosonic waves. Phys. Rev. D, Vol. 75, No. 2, p. 023002, January 2007.

[79] A. Kandus, K. E. Kunze, and C. G. Tsagas. Primordial magnetogenesis. Phys. Rep., Vol. 505, pp. 1–58, August 2011.

[80] L. L. Kitchatinov and G. Rüdiger. Seed fields for galactic dynamos by the magnetorotational instability. A&A, Vol. 424, pp. 565–570, September 2004.

[81] R. M. Kulsrud, R. Cen, J. P. Ostriker, and D. Ryu. The Protogalactic Origin for Cosmic Magnetic Fields. ApJ, Vol. 480, pp. 481–491, May 1997.

[82] K. E. Kunze. CMB anisotropies in the presence of a stochastic magnetic field. Phys. Rev. D, Vol. 83, No. 2, p. 023006, January 2011.

[83] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum mechanics*. 1965.

[84] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *The classical theory of fields*. 1975.

[85] G. Lemaître. Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, Vol. 47, pp. 49–59, 1927.

[86] G. Lemaître. Expansion of the universe, The expanding universe. MNRAS, Vol. 91, pp. 490–501, March 1931.

[87] G. Lemaître. L'Univers en expansion. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, Vol. 53, , 1933.

[88] M. Lemoine, G. Sigl, and P. Biermann. Supercluster Magnetic Fields and Anisotropy of Cosmic Rays above 10**(19) eV. *ArXiv Astrophysics e-prints*, March 1999.

[89] A. Lewis. CMB anisotropies from primordial inhomogeneous magnetic fields. Phys. Rev. D, Vol. 70, No. 4, p. 043011, August 2004.

[90] A. Lewis and S. Bridle. Cosmological parameters from CMB and other data: A Monte Carlo approach. Phys. Rev. D, Vol. 66, No. 10, p. 103511, November 2002.

[91] H. Li, G. Lapenta, J. M. Finn, S. Li, and S. A. Colgate. Modeling the Large-Scale Structures of Astrophysical Jets in the Magnetically Dominated Limit. ApJ, Vol. 643, pp. 92–100, May 2006.

[92] A. Mack, T. Kahniashvili, and A. Kosowsky. Microwave background signatures of a primordial stochastic magnetic field. Phys. Rev. D, Vol. 65, No. 12, p. 123004, June 2002.

[93] F. Marinacci and M. Vogelsberger. Effects of simulated cosmological magnetic fields on the galaxy population. MNRAS, Vol. 456, pp. L69–L73, February 2016.

[94] J. Martin and J. Yokoyama. Generation of large scale magnetic fields in single-field inflation. J. Cosmology Astropart. Phys., Vol. 1, p. 025, January 2008.

[95] G. C. McVittie. Condensations in an expanding universe. MNRAS, Vol. 92, pp. 500–518, April 1932.

[96] Teppei Minoda, Kenji Hasegawa, Hiroyuki Tashiro, Kiyotomo Ichiki, and Naoshi Sugiyama. Thermal Sunyaev-Zel'dovich effect in the intergalactic medium with primordial magnetic fields. *Phys. Rev. D*, Vol. 96, p. 123525, Dec 2017.

[97] A. S. Monin and A. M. Iaglom. *Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence. Volume 2 /revised and enlarged edition/.* 1975.

[98] A. Neronov and I. Vovk. Evidence for Strong Extragalactic Magnetic Fields from Fermi Observations of TeV Blazars. *Science*, Vol. 328, p. 73, April 2010.

[99] D. C. Pan, M. S. Vogeley, F. Hoyle, Y.-Y. Choi, and C. Park. Cosmic voids in Sloan Digital Sky Survey Data Release 7. MNRAS, Vol. 421, pp. 926–934, April 2012.

[100] D. Paoletti, F. Finelli, and F. Paci. The scalar, vector and tensor contributions of a stochastic background of magnetic fields to cosmic microwave background anisotropies. MNRAS, Vol. 396, pp. 523–534, June 2009.

[101] Daniela Paoletti and Fabio Finelli. Constraints on a stochastic background of primordial magnetic fields with wmap and south pole telescope data. *Physics Letters B*, Vol. 726, No. 1, pp. 45 – 49, 2013.

[102] E. N. Parker. Hydromagnetic Dynamo Models. ApJ, Vol. 122, p. 293, September 1955.

[103] P. J. E. Peebles. Recombination of the Primeval Plasma. ApJ, Vol. 153, p. 1, July 1968.

[104] P. J. E. Peebles. *The large-scale structure of the universe.* 1980.

[105] P. J. E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology.* 1993.

[106] P. J. E. Peebles and J. T. Yu. Primeval Adiabatic Perturbation in an Expanding Universe. ApJ, Vol. 162, p. 815, December 1970.

[107] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. ApJ, Vol. 142, pp. 419–421, July 1965.

[108] C. Pfrommer and T. A. Enßlin. Estimating galaxy cluster magnetic fields by the classical and hadronic minimum energy criterion. MNRAS, Vol. 352, pp. 76–90, July 2004.

[109] R. Plaga. Detecting intergalactic magnetic fields using time delays in pulses of γ-rays. Nature, Vol. 374, pp. 430–432, March 1995.

[110] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, M. Ashdown, F. Atrio-Barandela, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, and et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. A&A, Vol. 571, p. A16, November 2014.

[111] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, F. Arroja, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, and et al. Planck 2015 results. XIX. Constraints on primordial magnetic fields. A&A, Vol. 594, p. A19, September 2016.

[112] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, and et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. A&A, Vol. 594, p. A13, September 2016.

[113] Planck Collaboration, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, N. Bartolo, and et al. Planck 2015 results. XI. CMB power spectra, likelihoods, and robustness of parameters. A&A, Vol. 594, p. A11, September 2016.

[114] R. E. Pudritz and J. Silk. The origin of magnetic fields and primordial stars in protogalaxies. ApJ, Vol. 342, pp. 650–659, July 1989.

[115] B. Ratra. Cosmological 'seed' magnetic field from inflation. ApJ, Vol. 391, pp. L1–L4, May 1992.

[116] M. J. Rees. The origin and cosmogonic implications of seed magnetic fields. QJRAS, Vol. 28, pp. 197–206, September 1987.

[117] D. R. G. Schleicher, R. Banerjee, S. Sur, T. G. Arshakian, R. S. Klessen, R. Beck, and M. Spaans. Small-scale dynamo action during the formation of the first stars and galaxies. I. The ideal MHD limit. A&A, Vol. 522, p. A115, November 2010.

[118] S. Seager, D. D. Sasselov, and D. Scott. A New Calculation of the Recombination Epoch. ApJ, Vol. 523, pp. L1–L5, September 1999.

[119] S. Seager, D. D. Sasselov, and D. Scott. How Exactly Did the Universe Become Neutral? ApJS, Vol. 128, pp. 407–430, June 2000.

[120] N. R. Sen. On the stability of Cosmological models. Mit 2 Abbildungen. ZAp, Vol. 9, p. 215, 1934.

[121] S. K. Sethi and K. Subramanian. Primordial magnetic fields in the post-recombination era and early reionization. MNRAS, Vol. 356, pp. 778–788, January 2005.

[122] J. R. Shaw and A. Lewis. Massive neutrinos and magnetic fields in the early universe. Phys. Rev. D, Vol. 81, No. 4, p. 043517, February 2010.

[123] J. Richard Shaw and Antony Lewis. Constraining primordial magnetism. *Phys. Rev. D*,

Vol. 86, p. 043510, Aug 2012.

[124] Y. Shibusawa, K. Ichiki, and K. Kadota. The influence of primordial magnetic fields on the spherical collapse model in cosmology. J. Cosmology Astropart. Phys., Vol. 8, p. 017, August 2014.

[125] F. H. Shu. *The physics of astrophysics. Volume II: Gas dynamics.* 1992.

[126] J. Silk. Cosmic Black-Body Radiation and Galaxy Formation. ApJ, Vol. 151, p. 459, February 1968.

[127] V. M. Slipher. The radial velocity of the Andromeda Nebula. *Lowell Observatory Bulletin*, Vol. 2, pp. 56–57, 1913.

[128] K. Subramanian. Magnetic fields in the early Universe. *Astronomische Nachrichten*, Vol. 331, p. 110, January 2010.

[129] K. Subramanian. The origin, evolution and signatures of primordial magnetic fields. *Reports on Progress in Physics*, Vol. 79, No. 7, p. 076901, July 2016.

[130] K. Subramanian and J. D. Barrow. Magnetohydrodynamics in the early universe and the damping of nonlinear Alfvén waves. Phys. Rev. D, Vol. 58, No. 8, p. 083502, October 1998.

[131] K. Subramanian and J. D. Barrow. Small-scale microwave background anisotropies arising from tangled primordial magnetic fields. MNRAS, Vol. 335, pp. L57–L61, September 2002.

[132] K. Subramanian, T. R. Seshadri, and J. D. Barrow. Small-scale cosmic microwave background polarization anisotropies due to tangled primordial magnetic fields. MNRAS, Vol. 344, pp. L31–L35, September 2003.

[133] Kandaswamy Subramanian and John D. Barrow. Microwave background signals from tangled magnetic fields. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 81, pp. 3575–3578, Oct 1998.

[134] R. A. Sunyaev and Y. B. Zeldovich. Distortions of the Background Radiation Spectrum. Nature, Vol. 223, pp. 721–722, August 1969.

[135] R. A. Sunyaev and Y. B. Zeldovich. Small-Scale Fluctuations of Relic Radiation. Ap&SS, Vol. 7, pp. 3–19, April 1970.

[136] K. Takahashi, M. Mori, K. Ichiki, and S. Inoue. Lower Bounds on Intergalactic Magnetic Fields from Simultaneously Observed GeV-TeV Light Curves of the Blazar Mrk 501. ApJ, Vol. 744, p. L7, January 2012.

[137] K. Takahashi, M. Mori, K. Ichiki, S. Inoue, and H. Takami. Lower Bounds on Magnetic Fields in Intergalactic Voids from Long-term GeV-TeV Light Curves of the Blazar Mrk 421. ApJ, Vol. 771, p. L42, July 2013.

[138] H. Tashiro and N. Sugiyama. Sunyaev-Zel'dovich power spectrum produced by primordial magnetic fields. MNRAS, Vol. 411, pp. 1284–1292, February 2011.

[139] H. Tashiro and T. Vachaspati. Parity-odd correlators of diffuse gamma-rays and inter-

galactic magnetic fields. MNRAS, Vol. 448, pp. 299–306, March 2015.

[140] F. Tavecchio, G. Ghisellini, L. Foschini, G. Bonnoli, G. Ghirlanda, and P. Coppi. The intergalactic magnetic field constrained by Fermi/Large Area Telescope observations of the TeV blazar 1ES0229+200. MNRAS, Vol. 406, pp. L70–L74, July 2010.

[141] Michael S. Turner and Lawrence M. Widrow. Inflation-produced, large-scale magnetic fields. *Phys. Rev. D*, Vol. 37, pp. 2743–2754, May 1988.

[142] T. Vachaspati. Magnetic fields from cosmological phase transitions. *Physics Letters B*, Vol. 265, pp. 258–261, August 1991.

[143] J. P. Vallée. Faraday Screen and Reversal of Rotation Measure in the Local Supercluster Plane. AJ, Vol. 124, pp. 1322–1327, September 2002.

[144] G. B. van Albada. Formation and evolution of clusters of galaxies (Errata: 15 330). Bull. Astron. Inst. Netherlands, Vol. 15, p. 165, December 1960.

[145] H. J. Völk and A. M. Atoyan. Early Starbursts and Magnetic Field Generation in Galaxy Clusters. ApJ, Vol. 541, pp. 88–94, September 2000.

[146] I. Wasserman. On the origins of galaxies, galactic angular momenta, and galactic magnetic fields. ApJ, Vol. 224, pp. 337–343, September 1978.

[147] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.

[148] R. Wielebinski. Magnetic Fields in the Milky Way, Derived from Radio Continuum Observations and Faraday Rotation Studies. In R. Wielebinski and R. Beck, editors, *Cosmic Magnetic Fields*, Vol. 664 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, p. 89, 2005.

[149] H. Xu, B. W. O'Shea, D. C. Collins, M. L. Norman, H. Li, and S. Li. The Biermann Battery in Cosmological MHD Simulations of Population III Star Formation. ApJ, Vol. 688, p. L57, December 2008.

[150] Y. Xu, P. P. Kronberg, S. Habib, and Q. W. Dufton. A Faraday Rotation Search for Magnetic Fields in Large-scale Structure. ApJ, Vol. 637, pp. 19–26, January 2006.

[151] D. G. Yamazaki, K. Ichiki, T. Kajino, and G. J. Mathews. Effects of The Primordial Magnetic Field on The CMB. In A. Rajantie, C. Contaldi, P. Dauncey, and H. Stoica, editors, *Particles, Strings, and Cosmology-PASCOS 2007*, Vol. 957 of *American Institute of Physics Conference Series*, pp. 449–452, November 2007.

[152] D. G. Yamazaki, K. Ichiki, T. Kajino, and G. J. Mathews. Effects of a primordial magnetic field on low and high multipoles of the cosmic microwave background. Phys. Rev. D, Vol. 77, No. 4, p. 043005, February 2008.

[153] Y. B. Zel'dovich. Newtonian and Einsteinian Motion of Homogeneous Matter. AZh, Vol. 41, p. 873, 1964.

[154] Y. B. Zeldovich and R. A. Sunyaev. The Interaction of Matter and Radiation in a Hot-Model Universe. Ap&SS, Vol. 4, pp. 301–316, July 1969.

[155] 松原隆彦. 基本法則から読み解く 物理学最前線 4 「大規模構造の宇宙論宇宙に生まれた絶妙な多様性」. 共立出版, 2014.

[156] 須藤靖. 一般相対論入門. 株式会社 日本評論社, 2005.

付録 A

特殊函数

A.1　ベッセル関数

物理学においてベッセル関数は，円柱座標系での楕円型の偏微分方程式を解くために重要な特殊函数である．はじめに，任意の実数 l に対してベッセルの微分方程式が以下のように与えられる．

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-l^2)y=0 \tag{A.1}$$

ここで，l が非負整数 $(l=0,1,2,...)$ のときは二つの線形独立な解が以下のように与えられる．

$$J_l(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+l} \tag{A.2}$$

$$N_l(x)=\lim_{\alpha\to l}\frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi)-J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)} \tag{A.3}$$

ここで実数 α について $\Gamma(\alpha)$ はオイラーのガンマ関数である．また，式 (A.2) を第 1 種ベッセル関数，式 (A.3) を第 2 種ベッセル関数 (またはノイマン函数) と呼んで区別する．この二つの特性の違いとして，前者が原点 $x=0$ の近傍で収束値をとるのに対して，後者は $x=0$ について発散することがあげられる．また，l が非整数の場合は線形独立な二つの解は $J_l(x)$ と $J_{-l}(x)$ で与えられること，整数 l については $J_{-l}(x)=(-1)^lJ_l(x)$ および $N_{-l}(x)=(-1)^lN_l(x)$ が成り立つことなどが主な数学的性質である．また，第 1 種ベッセル関数 (A.2) および第 2 種ベッセル関数 (A.3) の複素線形結合をベッセルの微分方程式 (A.1) の独立な解として扱うこともできて，これはハンケル関数と呼ばれている．

上記の通り，楕円型の偏微分方程式を解く際に，円柱座標系ではベッセルの微分方程式 (A.1) の解であるベッセル関数が有用である．一方で，極座標系では

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+\left[1-\frac{l(l+1)}{x^2}\right]y=0 \tag{A.4}$$

と表される方程式が存在して，球ベッセル微分方程式と呼ばれる．球ベッセル微分方程式の解は

ベッセル函数 (A.2) および (A.3) を用いて

$$j_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \tag{A.5}$$

$$n_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} N_{l+\frac{1}{2}}(x) \tag{A.6}$$

と書くことができる．これらをそれぞれ第 1 種球ベッセル関数および第 2 種球ベッセル関数 (球ノイマン函数) と呼ぶ．

ここからは，本文との関連性から第 1 種球ベッセル関数の性質を述べる．元の球ベッセル方程式の形からすぐに漸化式

$$j_{l-1} + j_{l+1} = \frac{2l+1}{x} j_l, \qquad l = 1, 2, ... \tag{A.7}$$

$$l j_{l-1} - (l+1) j_{l+1} = (2l+1)\frac{dj_l}{dx}, \qquad l = 0, 1, 2, ... \tag{A.8}$$

が成立することがわかる．(同様の漸化式はベッセル関数にも成り立つ．) また，これらの三項間漸化式から j_{l-1} を消去することにより，以下の二項間漸化式が得られる．

$$j_{l+1} = \frac{l}{x} j_l - \frac{dj_l}{dx} \tag{A.9}$$

ここで，$l = 0$ のときは球ベッセル方程式 (A.4) を直接解くことにより，

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{A.10}$$

を得ることができて，先の二項間漸化式 (A.9) から，非負整数 $l = 0, 1, 2, ...$ に対して第 1 種球ベッセル関数の一般的な表式が次のように表される．

$$j_l(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l j_0(x) \tag{A.11}$$

これはしばしば球ベッセル関数のレイリー表現と呼ばれる．

A.2 ルジャンドル多項式と球面調和関数

非負整数 n 次のルジャンドル多項式は方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x\frac{dP_n}{dx} + n(n+1)P_n = 0, \tag{A.12}$$

の $-1 \leq x \leq 1$ の範囲における解として定義される．またこの関数は

$$P_n(1) = 1 \tag{A.13}$$

で規格化される．このときルジャンドル多項式は以下の漸化式

$$(2n+1)xP_n - nP_{n-1} = (n+1)P_{n+1} \tag{A.14}$$

$$nxP_n - nP_{n-1} = (x^2-1)\frac{dP_n}{dx} \tag{A.15}$$

を満たす．また，これらから二項間漸化式

$$P_{n+1} = xP_n + \frac{x^2-1}{n+1}\frac{dP_n}{dx} \tag{A.16}$$

が得られる．

式 (A.12) および (A.13) から明らかに，

$$P_0(x) = 1 \tag{A.17}$$

である．よって二項間漸化式 (A.16) からルジャンドル多項式の具体的な形が以下のようにわかる．

$$P_1(x) = x,\ \ P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2},\ \ P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2},\ \ \ldots \tag{A.18}$$

また漸化式 (A.16) からルジャンドル多項式の一般的な形が高階微分を用いて以下のように得られる (この表現を一般にルジャンドル多項式のロドリゲス表現と呼ぶ)．

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{A.19}$$

また，ルジャンドル多項式のパリティは以下のような性質となる．

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \tag{A.20}$$

式 (A.19) から，多項式 $P_n(x)$ の次数は n であることがわかる．ロドリゲス表現を用いるとルジャンドル多項式の明示的な形を求めることができて，

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^n &= \frac{d^2}{dx^2}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{n!x^{2m}}{m!(n-m)!} \\ &= \sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{n!2m(2m-1)}{m!(n-m)!}x^{2m-2}\end{aligned} \tag{A.21}$$

が導かれる．従って，式 (A.19) から

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{m=[n/2]}^{n}(-1)^{n-m}\frac{2m(2m-1)\cdots(2m-n+1)}{m!(n-m)!}x^{2m-n} \tag{A.22}$$

が得られる．ここで $[n/2]$ はガウス記号と呼ばれる，$n/2$ を超えない最大の整数である．(これは 1962 年にケネス・アイバーソンによって改めて定義されており，そのため床関数とも呼ばれる．)

ここで $k=n-m$ についての総和に書き直し，分子分母にそれぞれ $(n-2k)!$ をかけるともっと簡単な形になり，ルジャンドル多項式の一般形は最終的に

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} \tag{A.23}$$

と表せる．

さて，ルジャンドル多項式のロドリゲス表現 (A.19) を用いると，ルジャンドル多項式を含んだ積分を計算することも可能である．ここで，ルジャンドル多項式の重要な性質として，これらは互いに直交していることを証明する．まずはじめに，n 次のルジャンドル多項式に，$m<n$ なる非負整数 m を含んだ項 x^m をかけて積分することを考える．式 (A.19) を用いると，

$$\int_{-1}^{1}x^mP_n(x)dx=\frac{1}{n!2^n}\int_{-1}^{1}x^m\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^ndx \tag{A.24}$$

と表せる．この式を m 回部分積分すると，表面項 (x^2-1) が消えることから，

$$\int_{-1}^{1}x^mP_n(x)dx=(-1)^m\frac{m!}{n!2^n}\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^ndx=0 \tag{A.25}$$

したがって，多項式 P_n は $m<n$ なる任意の非負整数 m について x^m と直交することがわかる．また，P_n は x について n 次の多項式となるから，異なるルジャンドル多項式は全て互いに直交することが明らかである．すなわち，

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0,\qquad m\neq n. \tag{A.26}$$

である．では，ルジャンドル多項式の二乗の積分を計算しよう．再びルジャンドル多項式のロドリゲス表現 (A.19) を用いて n 回の部分積分を施すと

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}\int_{-1}^{1}dx(x^2-1)^n\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n \tag{A.27}$$

さらにここで式 (A.21) を用いると

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n=(2n)! \tag{A.28}$$

が得られる．最後に，式 (A.27) に残った積分をガンマ関数を用いて計算すると

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^ndx=(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \tag{A.29}$$

となり，これら全てを併せると，

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1} \tag{A.30}$$

である．従ってルジャンドル多項式は $-1 \le x \le 1$ の範囲において直交系をなしており，式 (A.30) でノルムが与えられている．この正規化から，$-1 \le x \le 1$ においてルジャンドル関数の集合は完全直交系となっていて，

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1} \tag{A.31}$$

とかける．

本文では平面波をルジャンドル多項式で以下のように級数展開している．

$$\mathrm{e}^{-ix\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(-i)^l j_l(x) P_l(\cos\theta) \tag{A.32}$$

ここで新たな変数として $y = \cos\theta$ を導入し，ルジャンドル多項式の直交性を利用して式 (A.32) を次のように等価な形で書き直す．

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-ixy} P_n(y) dy = 2(-i)^n j_n(x) \tag{A.33}$$

この式を見ると，係数の違いはあるものの，球ベッセル関数は同じ次数のルジャンドル多項式をフーリエ変換したものであることがわかる．

n が大きい場合は, ルジャンドル多項式は漸近的に

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{A.34}$$

と表せる．(例えば，文献 [1] を参照せよ．) このことから，n が大きくなると関数 $P_n(\cos\theta)$ は周期 $\dfrac{2\pi}{n}$ で振動することがわかる．

本文では球面調和関数を単位球面上で展開した形 $Y_{lm}(\mathbf{n}) = Y_{lm}(\theta, \phi)$ を用いている．ただし θ と ϕ は極座標における角度変数を表している．ここで，球面調和関数は単位球面上において完全正規直交系をなしており，

$$\int d\mathbf{n}\ Y^*_{lm}(\mathbf{n}) Y_{l'm'}(\mathbf{n}) = \int \sin\theta\ d\theta\ d\phi\ Y^*_{lm}(\theta,\phi) Y_{l'm'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{A.35}$$

となっている．(詳細については例えば，文献 [61] を参照されたい．) ここで，球面調和関数がルジャンドル多項式を用いて書き表せることを思い出せば,

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \cdot \sin^{|m|}\theta \cdot \frac{d^{|m|} P_l(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^{|m|}} \cdot \mathrm{e}^{im\phi} \tag{A.36}$$

である．ここで，球面調和函数は次の方程式

$$\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} + l(l+1)Y_{lm} - \frac{m^2}{\sin^2\theta} Y_{lm} = 0 \tag{A.37}$$

の解であるから，球面調和函数の漸近的な形式は，式 (A.34) との類推から，

$$Y_{lm}(\theta,\phi)=\frac{1}{\pi\sqrt{\sin\theta}}\cos\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right]\cdot\mathrm{e}^{im\phi}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{l}\right) \tag{A.38}$$

となるはずである．この表現は $l\gg 1, l\gg m$ で有効である．ここで，式 (A.34) と (A.38) は球面の極付近，より正確にはそれぞれ $\sin\theta\leq n^{-1}$ と $\sin\theta\leq l^{-1}$ で正しくないということを注意しておく．