

CIP法を用いた 相対論的流体シミュレーション

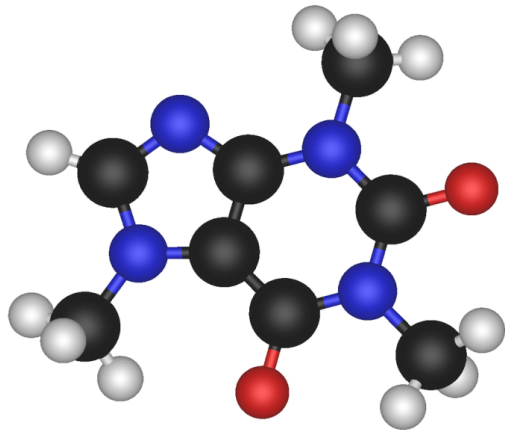
宇宙論研究室

M1 箕田鉄兵

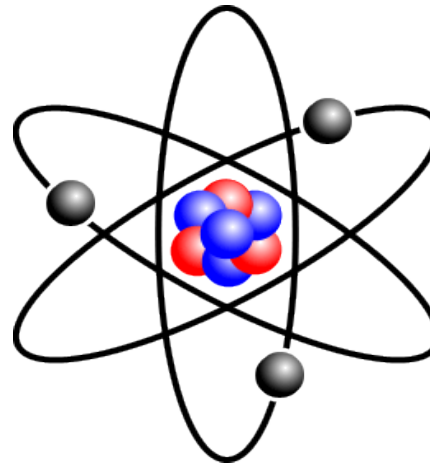
2016/04/21

物質の階層構造

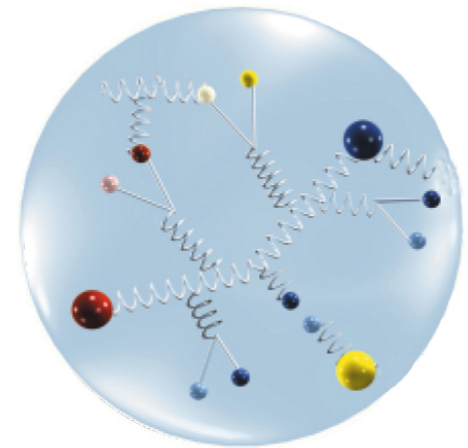
分子



原子

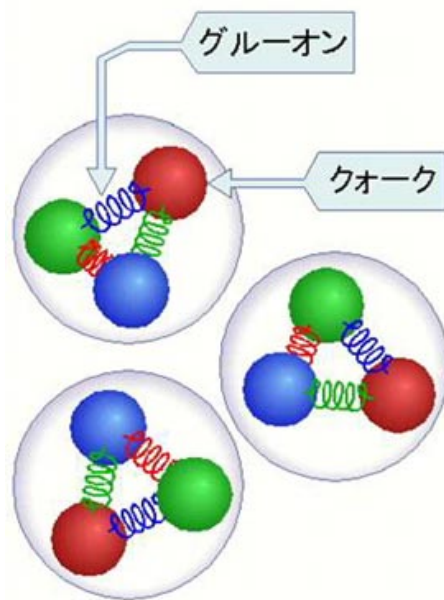


核子



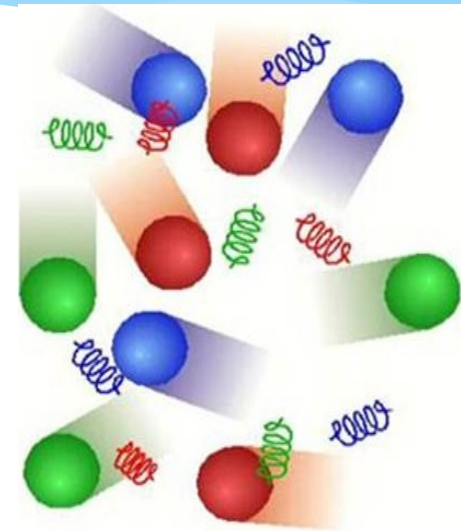
<https://www.boundless.com/chemistry/textbooks/boundless-chemistry-textbook/atoms-molecules-and-ions-2/the-periodic-table-35/molecules-204-5136/>
<https://simple.wikipedia.org/wiki/Atom>
https://panda.gsi.de/oldwww/framework/content/physics/phys_nucstruc.php

QGPとはなにか



核子

高温・高密度



クォーク・グルーオン・プラズマ
(QGP)

初期宇宙と重イオン衝突実験

宇宙の歴史

QGP
クォーク・グルーオン
プラズマ

時間: ビッグバンから数 10^{-6} 秒後
温度: 2×10^{12} K
エネルギー密度: 1 GeV/fm^3

SIG BANG

インフレーション
宇宙急激膨張

QCD相転移
(QGP → ハドロン)

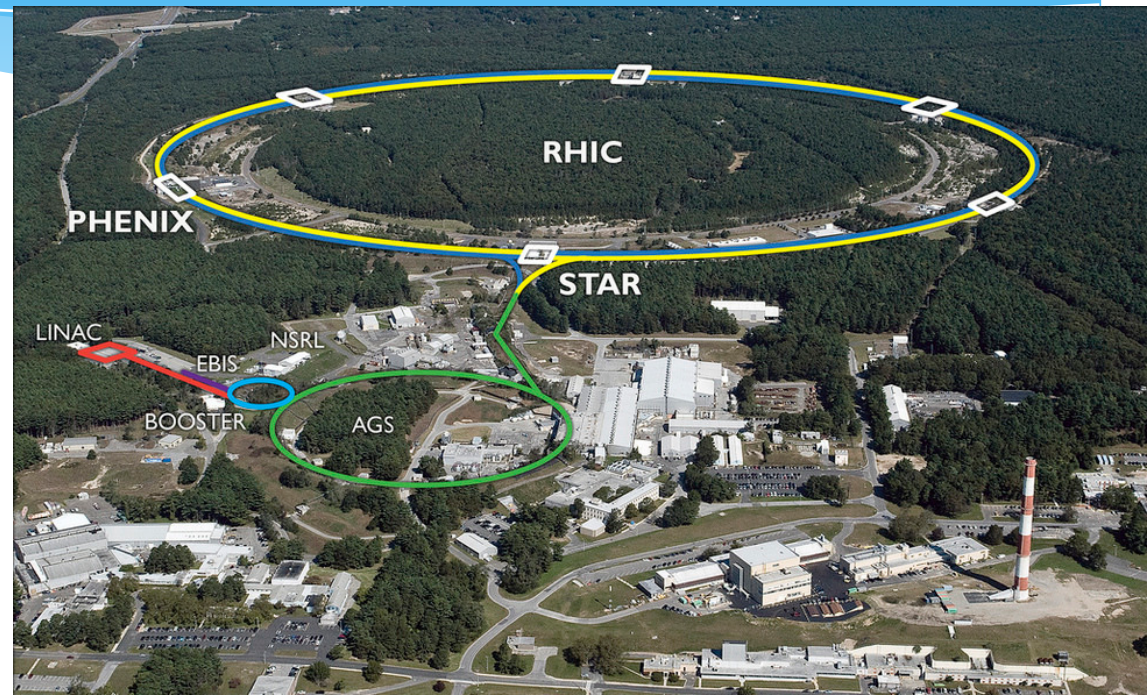
Key: W, Z bosons, photon, quark, meson, gluon, baryon, electron, muon, tau, ion, neutrino, atom, black hole

軽元素合成

宇宙の晴れ上がり

原始銀河形成

現在の宇宙



<http://alice-j.org/qgp.html>

<http://www.atlasobscura.com/places/brookhaven-relativistic-heavy-ion-collider>

QGPのダイナミクス

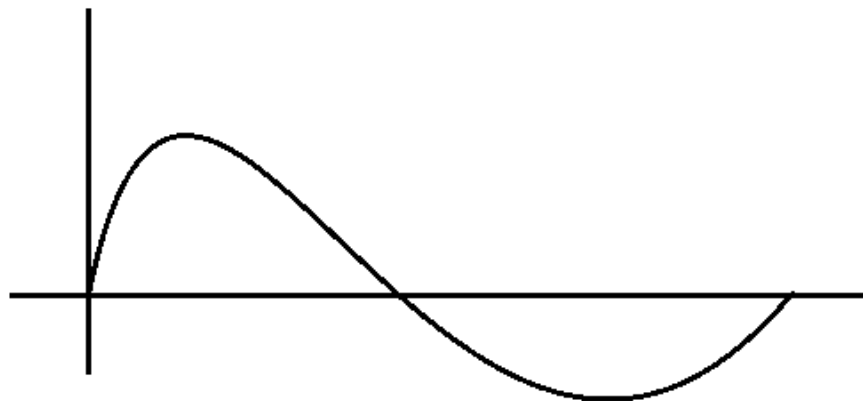
- * 粘性の影響が小さく、完全流体のようなふるまい
- * 光速に近い速度で膨張

→ 相対論的流体力学で記述

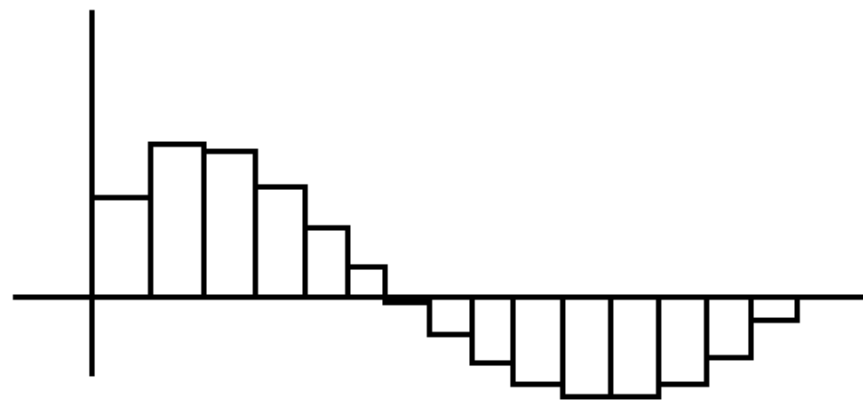
→ 非線形方程式であるため、数値計算が必要

数値計算について

- * 連続関数 $\Rightarrow$ 離散的数値
- * より精密な手法（離散化の仕方）の探求



解析



数値計算

本研究の目的

- * 非相対論的流体力学において使われてきたCIP法を相対論的流体方程式に適用
- * 解析解との比較から、CIP法の有用性について考察
- * CIP法は2種類の変数を用いる精密性の高い手法(詳しくは後述)

1次元相対論的流体モデル

①流体方程式

$$\frac{\partial U^0}{\partial t} + \frac{\partial F^0}{\partial x} = 0 \cdots \text{エネルギー保存則}$$

$$\frac{\partial U^1}{\partial t} + \frac{\partial F^1}{\partial x} = 0 \cdots \text{運動量保存則}$$

1次元相対論的流体モデル

②モデルの設定

光速 $c = 1$ の自然単位系

状態方程式 $p = \frac{e}{3}$

完全流体

$$U^0 = (e + p)\gamma^2 - p$$

$$U^1 = (e + p)\gamma^2 v$$

$$F^0 = (e + p)\gamma^2 v$$

$$F^1 = (e + p)\gamma^2 v^2 + p$$

e : 局所静止系でのエネルギー密度

p : 圧力

γ : ローレンツ因子

v : 流速

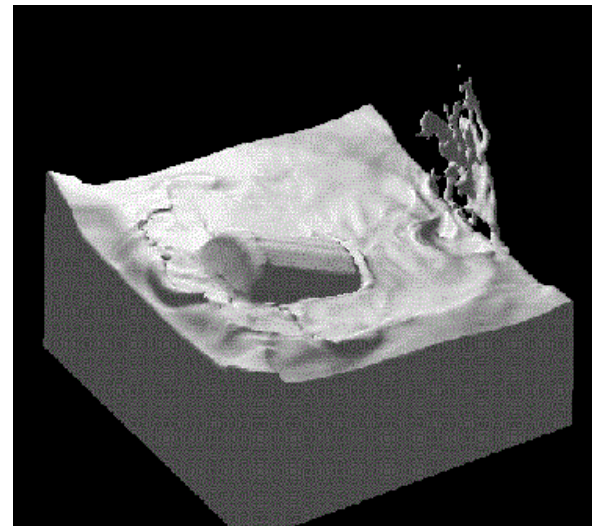
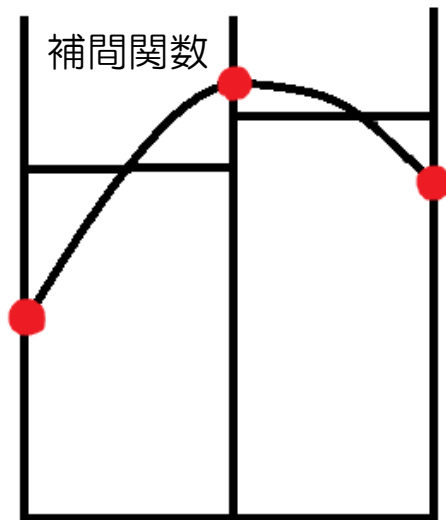
1次元相対論的流体モデル

③式の整理

$$F^0 = U^1, \quad F^1 = \frac{5}{3}U^0 - \frac{2}{3}\sqrt{4(U^0)^2 - 3(U^1)^2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}U^0 + \frac{\partial}{\partial x}U^1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}U^1 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{5}{3}U^0 - \frac{2}{3}\sqrt{4(U^0)^2 - 3(U^1)^2}\right) = 0 \end{cases}$$

CIP-CSL2法とは

- * セル内体積平均値と両端の値がそれぞれ独立に時間発展する
- * セルの体積値および両端における点値を用いて2次関数で補間する



http://www2.es.titech.ac.jp/xiao/research_j.html

相対論的流体力学への拡張

- * もともとのCIP-CSL2法で仮定された式(この u が重要！)

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(uq)$$

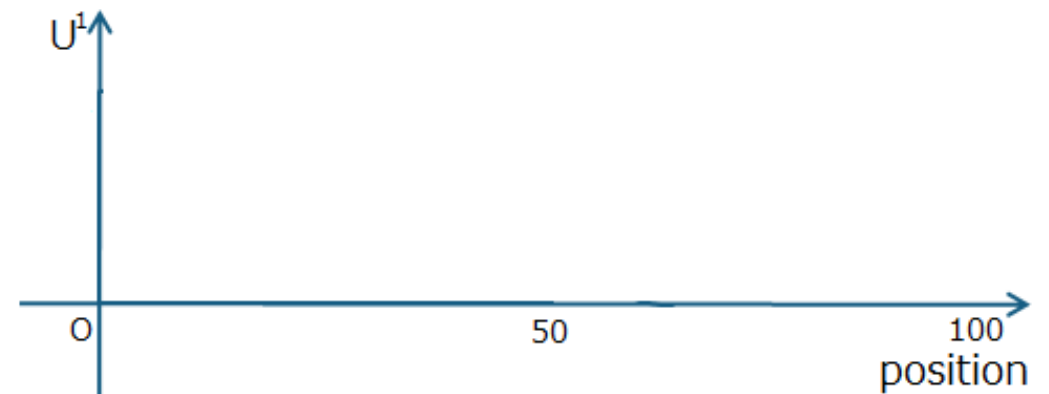
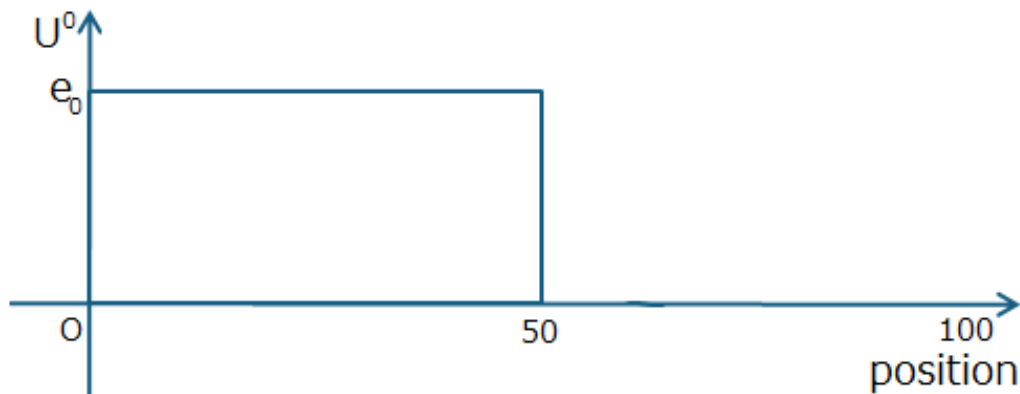
- * 相対論的流体方程式へのナイーブな拡張→非物理的な解の振る舞い

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}U^0 + \frac{\partial}{\partial x}U^1 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}U^1 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{5}{3}U^0 - \frac{2}{3}\sqrt{4(U^0)^2 - 3(U^1)^2}\right) &= 0\end{aligned}$$

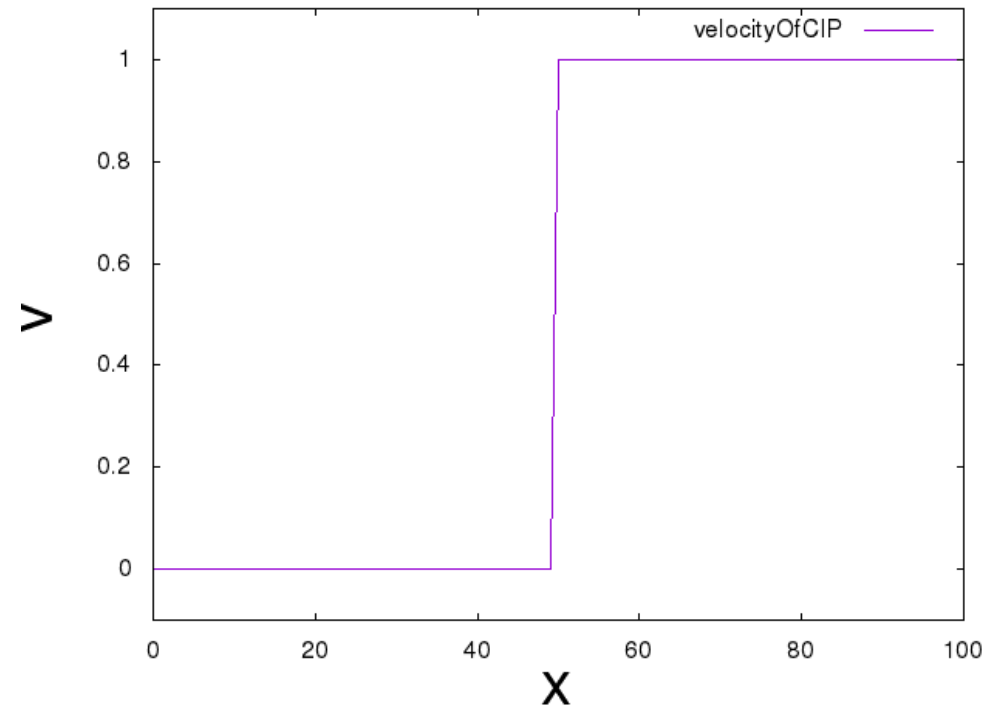
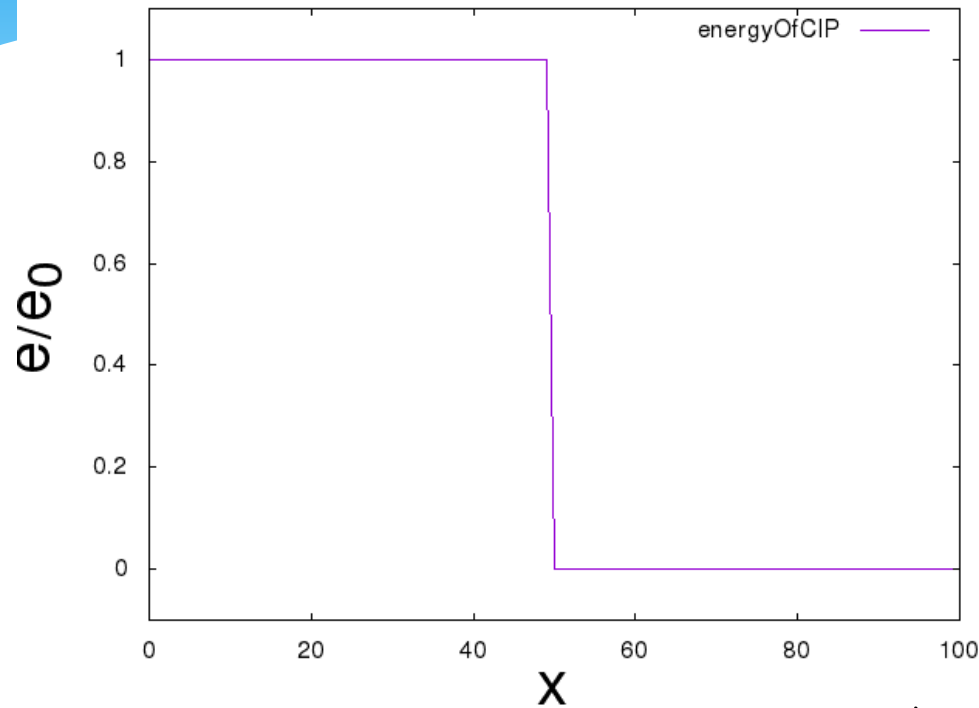
- * $u = c_s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ とするとうまくいった

初期条件について

- * 本研究ではRiemann問題(初期値が階段型)を想定
- * Riemann問題は流体力学の基本的な時間発展の問題で、このモデルでは解析解が既知

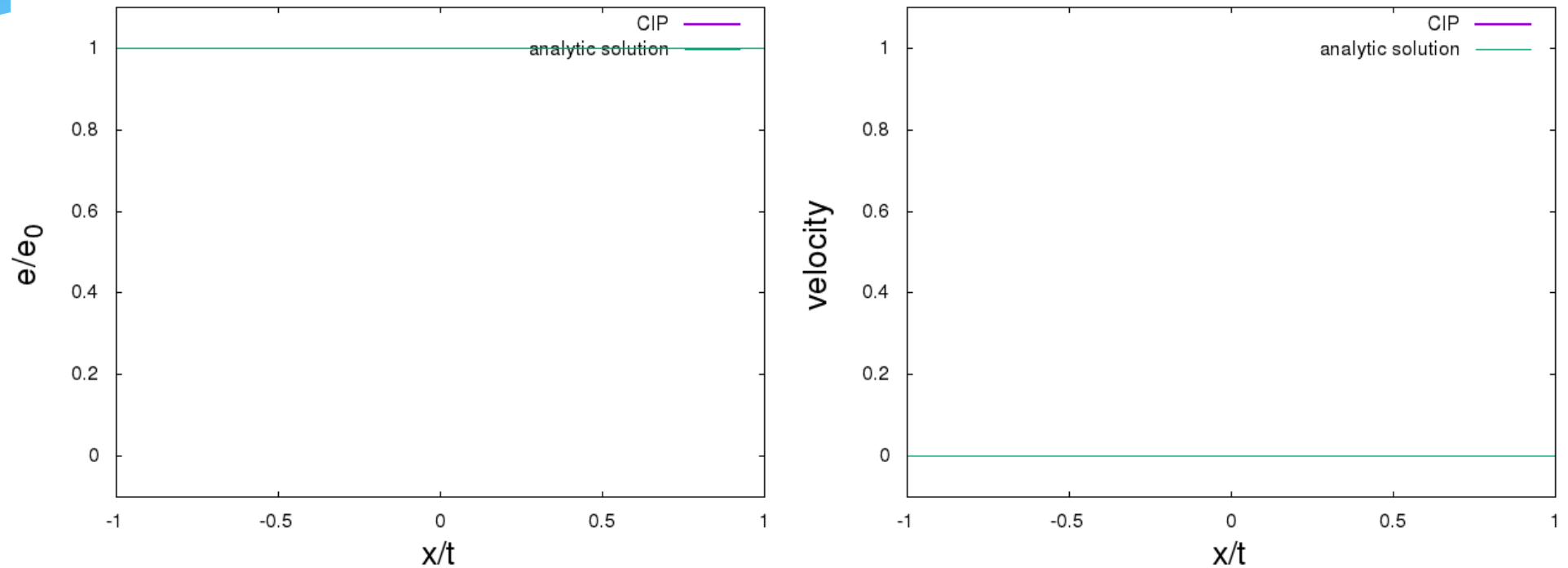


計算結果：真空への膨張



流体が真空に崩れていく
振動の小さい滑らかな解
真空との境目付近に小さなへこみ

計算結果：解析解との比較



エネルギー勾配の小さい部分→誤差小
流体が崩れる左側→誤差大

まとめ

研究内容：CIP法を相対論的流体力学に適用

研究結果：エネルギー勾配が小→解析解を概ね再現

エネルギー勾配が大→解析解との誤差

今後の展望：移流速度 u の定義の再検討

補間関数の変更

1次元相対論的流体モデル

①流体方程式

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{01}}{\partial x} = 0 \dots \text{エネルギー保存則}$$

$$\frac{\partial T^{10}}{\partial t} + \frac{\partial T^{11}}{\partial x} = 0 \dots \text{運動量保存則}$$

$T^{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソル

0は時間成分、1は空間成分

1次元相対論的流体モデル

②拘束条件

$$T^{\mu\nu} = eu^{\mu}u^{\nu} - p\Delta^{\mu\nu} \dots \text{完全流体}$$

$$p = \frac{e}{3} \dots \text{状態方程式}$$

p は圧力、 e は局所静止系でのエネルギー密度

1次元相対論的流体モデル

③変数消去

$$T^{10} = T^{01}, \quad T^{11} = \frac{5}{3}T^{00} - \frac{2}{3}\sqrt{4(T^{00})^2 - 3(T^{01})^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}T^{01} + \frac{\partial}{\partial x}T^{01} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}T^{01} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{5}{3}T^{00} - \frac{2}{3}\sqrt{4(T^{00})^2 - 3(T^{01})^2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

相対論的流体力学への拡張

- * もともとのCIP-CSL2法で仮定された式(この u が重要！)

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(uq)$$

- * 相対論的流体方程式へのナイーブな拡張→非物理的な解の振る舞い

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T^{00} + \frac{\partial}{\partial x} T^{01} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} T^{01} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{5}{3} T^{00} - \frac{2}{3} \sqrt{4(T^{00})^2 - 3(T^{01})^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

- * $u = c_s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ とするとうまくいった

Riemann問題の解析解

$$\left(\partial_t + \frac{v \pm c_s}{1 \pm vc_s} \partial_x\right) R_{\pm} = 0$$

$$R_{\pm} \equiv y - y_0 \pm \int_{e_0}^e de' \frac{c_s}{e' + p}$$

$$y = -\frac{c_s}{1 + c_s^2} \ln \frac{e}{e_0}$$

$$x = \frac{v - c_s}{1 - vc_s} t$$

$$e = e_0 \exp \left\{ -\frac{4\sqrt{3}}{3} \tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}x + t}{x + \sqrt{3}t} \right) \right\}$$